Concours du C.A.P.E.S
Première Epreuve

(Analyse) Session 1997 externe

http://www.archimaths.net/

OBJET ET NOTATIONS DU PROBLÈME

Dans tout le problème, α désigne un nombre réel strictement positif. On notera S_α la somme de la série de Riemann $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}}$, $\sigma_\alpha(n)$ la somme partielle $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha+1}}$ et $\rho_\alpha(n)$ la somme de la série reste $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha+1}}$.

L'objet du problème est l'étude de la fonction S, définie sur $\mathbf{R}_+^*$, qui à α associe S_α, et la détermination de développements asymptotiques pour $\rho_\alpha(n)$.

Pour chaque calcul numérique, on décrira la méthode de calcul utilisée et on justifiera le résultat en tenant compte des erreurs d'arrondi.

Les dérivées successives d'une fonction f seront notées $f^{(r)}$; par convention, on pose $f^{(0)} = f$.

I. ÉTUDE DE LA FONCTION S

I.1. **Régularité et variations de la fonction S.**

Pour tout entier $k \geq 1$, on note f_k la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par

$$\forall\, \alpha \in \mathbf{R}_+^*, \quad f_k(\alpha) = \frac{1}{k^{\alpha+1}}.$$

I.1.1. Montrer que, pour tout entier $r \geq 1$, la série de fonctions de terme général $f_k^{(r)}$ est normalement convergente sur tout intervalle de la forme $[\alpha_0, +\infty[$ avec $\alpha_0 > 0$.

I.1.2. En déduire que la fonction S est de classe C^∞.

I.1.3. Montrer que la fonction S est décroissante et convexe.

I.2. **Étude aux bornes de la fonction S.**

I.2.1. Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a les inégalités

$$\frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{k^{\alpha+1}}.$$

En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{\alpha}\,\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \rho_\alpha(n) \leq \frac{1}{\alpha}\,\frac{1}{n^\alpha}. \tag{1}$$

I.2.2. Montrer que, pour n fixé, on a

$$S_\alpha = \sigma_\alpha(n) + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

quand α tend vers $+\infty$. On a en particulier $\lim_{n \to \infty} S_\alpha = 1$.

1.2.3. *a.* Montrer que $S_\alpha - \dfrac{1}{\alpha}$ est borné au voisinage de 0.

b. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^{\alpha+1}}$ est décroissante sur $[3, +\infty[$. En déduire un minorant de la dérivée de la fonction $\alpha \mapsto \rho_\alpha(3)$, puis la croissance de la fonction $\alpha \mapsto \rho_\alpha(3) - \dfrac{1}{\alpha}$.

c. En écrivant $S_\alpha - \dfrac{1}{\alpha} = \sigma_\alpha(3) + \left(\rho_\alpha(3) - \dfrac{1}{\alpha}\right)$, montrer qu'il existe une constante γ telle que

$$S_\alpha = \frac{1}{\alpha} + \gamma + o(1)$$

quand α tend vers 0 par valeurs supérieures.

d. En utilisant l'encadrement (1), montrer que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \leq \gamma \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$

En déduire que $\gamma = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right)$.

[Ce nombre γ est appelé la constante d'Euler.]

I.3. Valeurs numériques approchées de S_α et de γ.

I.3.1. *a.* En utilisant l'encadrement (1), déterminer la valeur décimale par défaut à 10^{-3} près de S_α pour $\alpha = 0{,}5$.

b. Peut-on raisonnablement espérer trouver de la même manière la valeur décimale par défaut à 10^{-7} près de $S_{0,5}$? Pourquoi ?

I.3.2. On cherche un meilleur encadrement de $\rho_\alpha(n)$ dans l'espoir d'en déduire une meilleure approximation de S_α.

a. Pour tout $\alpha > 0$, on note h_α la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad h_\alpha(t) = \frac{1}{t^{\alpha+1}}.$$

Montrer que h_α est convexe.

b. Montrer, en utilisant la méthode des trapèzes, qu'on a

$$\forall k \geq 1, \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^{\alpha+1}} + \frac{1}{(k+1)^{\alpha+1}}\right).$$

En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, la minoration

$$\frac{1}{\alpha}\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^{\alpha+1}} \leq \rho_\alpha(n). \tag{2}$$

c. Montrer, en utilisant la méthode du milieu, qu'on a

$$\forall k \geq 1, \frac{1}{k^{\alpha+1}} \leq \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^{\alpha+1}}.$$

En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, la majoration

$$\rho_\alpha(n) \leq \frac{1}{\alpha} \quad \frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^\alpha}. \tag{3}$$

I.3.3. En utilisant l'encadrement résultant de (2) et (3), déterminer la valeur décimale par défaut à 10^{-7} près de $S_{0,5}$.

I.3.4. *a*. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \frac{1}{2n} \leq \gamma \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

b. Déterminer la valeur décimale par défaut à 10^{-6} près de γ.

II. DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DE $\rho_\alpha(n)$

Dans toute cette partie, α est un réel strictement positif fixé.

On définit une suite de fonctions définies sur l'intervalle $[0, 1[$ par

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \varphi_0(x) = (1-x)^{-\alpha} - 1$$

et, pour tout entier $j \geq 1$, par

$$\forall x \in [0, 1[, \quad \varphi_j(x) = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+j-1)\, x^j \left((1-x)^{-(\alpha+j)} - 1\right).$$

Étant donné une suite $(u_j)_{j \in \mathbf{N}}$ de réels, pour tout entier $p \geq 1$, on notera g_p la fonction définie sur $[0, 1[$ par

$$\forall x \in [0, 1[, \quad g_p(x) = \sum_{j=0}^{p-1} u_j\ \varphi_j(x) - x.$$

II.1. Détermination de $(u_j)_{j \in \mathbf{N}}$ pour que $g_p(x) = O(x^{p+1})$ au voisinage de 0.

II.1.1. Montrer que, pour $r \leq j$, on a $\varphi_j^{(r)}(0) = 0$ et que, pour $r > j$, on a

$$\varphi_j^{(r)}(0) = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+r-1)\frac{r!}{(r-j)!}.$$

II.1.2. Montrer que, pour tout entier r vérifiant $1 \leq r \leq p$, on a $g_p^{(r)}(0) = g_r^{(r)}(0)$. En déduire que la condition

$$\forall p \geq 1, \quad g_p(x) = O(x^{p+1}) \tag{4}$$

au voisinage de 0, est équivalente à la condition

$$\forall p \geq 1, \quad g_p^{(p)}(0) = 0.$$

II.1.3. Calculer $g_p^{(p)}(0)$. En déduire que la condition (4) est vérifiée si et seulement si la suite $(u_j)_{j \in \mathbf{N}}$ vérifie

$$u_0 = \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad \forall p \geq 2,\ \sum_{j=0}^{p-1} \frac{u_j}{(p-j)!} = 0. \tag{5}$$

II.1.4. Montrer qu'il existe une et une seule suite $(u_j)_{j \in \mathbf{N}}$ vérifiant (5), donc telle que la condition (4) soit vérifiée. Quand ces conditions sont vérifiées, montrer que, pour tout $j \in \mathbf{N}$, le nombre $\alpha\, u_j$ est rationnel.

II.2. **Développements asymptotiques de** $\rho_\alpha(n)$.

On suppose maintenant que la suite $(u_j)_{j \in \mathbf{N}}$ vérifie (5).

II.2.1. Montrer que, pour $p \geq 1$ fixé, la série de terme général $\frac{1}{k^\alpha} g_p\left(\frac{1}{k}\right)$, avec $k \geq 2$, est convergente et que la série reste vérifie

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} g_p\left(\frac{1}{k}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+p}}\right)$$

pour n au voisinage de l'infini.

II.2.2. Montrer que, pour tout $p \geq 1$, il existe un polynôme G_p tel que

$$\forall\, k \geq 2, \quad \frac{1}{k^\alpha} g_p\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{(k-1)^\alpha} G_p\left(\frac{1}{k-1}\right) - \frac{1}{k^\alpha} G_p\left(\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k^{\alpha+1}}\,.$$

En déduire que

$$\forall\, n \geq 1, \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} g_p\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n^\alpha} G_p\left(\frac{1}{n}\right) - \rho_\alpha(n)$$

et que, pour n au voisinage de l'infini, on a donc

$$\rho_\alpha(n) = \frac{1}{n^\alpha} G_p\left(\frac{1}{n}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+p}}\right).$$

II.3. **Propriétés de la suite** $(u_j)_{j \in \mathbf{N}}$ **vérifiant la récurrence** (5).

On suppose encore que la suite $(u_j)_{j \in \mathbf{N}}$ vérifie (5).

Soit θ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\theta(0) = 1$ et

$$\forall\, x \in \mathbf{R}^*, \quad \theta(x) = \frac{x}{\exp(x) - 1}\,.$$

II.3.1.*a*. Montrer que la fonction θ admet au voisinage de 0 des développements limités à tout ordre. Pour tout $p \geq 1$, on notera

$$\theta(x) = v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \ldots + v_p x^p + \mathrm{o}\,(x^p)$$

ce développement limité.

b. Expliciter v_0, v_1, v_2 et v_3.

II.3.2. Montrer que, pour tout $j \geq 0$, on a $v_j = \alpha\, u_j$.

II.3.3.*a*. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, on a

$$\theta(x) = \frac{x}{2}\left(\coth\left(\frac{x}{2}\right) - 1\right).$$

b. En déduire que pour tout $i \geq 1$, on a $v_{2i+1} = 0$.

II.3.4.*a*. Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, on a l'égalité

$$\operatorname{th}(x) + \coth(x) = 2\coth(2x)\ .$$

b. Exprimer les coefficients des développements limités de la fonction th au voisinage de 0 en fonction de ceux de la fonction θ .

c. Montrer que pour tout entier $i \geq 1$, la dérivée $\operatorname{th}^{(2i-1)}(0)$ est non nulle et du signe de $(-1)^{i-1}$. [On pourra raisonner par récurrence et dériver, à l'aide de la formule de Leibniz, l'identité $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2$.]

d. En déduire que, pour tout $i \geq 1$, le coefficient v_{2i} est du signe de $(-1)^{i-1}$.

II.4. **Développements asymptotiques de $\rho_\alpha(n)$ (suite).**

On suppose toujours que la suite $(u_j)_{j \in \mathbf{N}}$ vérifie (5).

II.4.1. Montrer que, pour tout $p \geq 1$, on a $g_{2p+1} = g_{2p+2}$.

II.4.2. En déduire que, pour tout $p \geq 1$, on a

$$\rho_\alpha(n) = \frac{1}{\alpha}\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^{\alpha+1}} + \sum_{i=1}^{p} (\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+2i-1)\frac{v_{2i}}{n^{\alpha+2i}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+2p+2}}\right)$$

pour n au voisinage de l'infini.

III. NON-CONVERGENCE DES DÉVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DE $\rho_\alpha(n)$

Dans toute cette partie, α est un réel strictement positif fixé. On se propose de montrer que la partie régulière des développements asymptotiques de $\rho_\alpha(n)$ n'a pas de limite finie lorsque p tend vers l'infini.

III.1. Pour $x \in \mathbf{R}^*$ fixé, on considère la fonction 2π-périodique f telle que pour $t \in]-\pi, \pi]$ on ait $f(t) = \operatorname{ch}(xt)$.

III.1.1. Montrer que la fonction f est paire, continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbf{R}$.

III.1.2. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f .

III.1.3. Justifier l'égalité entre f et la somme de sa série de Fourier. En écrivant cette égalité pour $t = \pi$, montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, on a

$$\pi\coth(\pi x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2+n^2}\ .$$

III.2. On rappelle que, pour tout entier N et pour tout réel $X \neq -1$, on a

$$\frac{1}{1+X} = \sum_{k=0}^{N} (-1)^k X^k + (-1)^{N+1} \frac{X^{N+1}}{1+X}. \qquad (6)$$

III.2.1. En appliquant (6) aux quantités

$$\frac{2x}{x^2+n^2} = \frac{2x}{n^2}\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)^{-1},$$

montrer qu'au voisinage épointé de 0 on a

$$\pi \coth(\pi x) - \frac{1}{x} = 2 \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} S_{2i-1}\, x^{2i-1} + O(x^{2p+1}).$$

III.2.2. En déduire que, pour tout $i \geq 1$, on a

$$v_{2i} = 2(-1)^{i-1} \frac{S_{2i-1}}{(2\pi)^{2i}}.$$

III.3. Déduire des questions précédentes que, pour $\alpha > 0$ et $n > 0$ fixés, on a

$$\lim_{p \to \infty} \left[(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+2p-1)\frac{|v_{2p}|}{n^{\alpha+2p}}\right] = +\infty.$$

Conclure.