
Concours du C.A.P.E.S
Deuxième Epreuve

(Algèbre et Géométrie) Session 1998 externe

<http://www.archimaths.net/>

Notations du problème

\mathcal{A} désigne un plan euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct et \mathcal{E} l'espace vectoriel associé à \mathcal{A} . On note $\vec{x} \cdot \vec{y}$ le produit scalaire de deux vecteurs \vec{x} et \vec{y} de \mathcal{E} .

Si ψ est un endomorphisme linéaire de \mathcal{E} , on note ψ^* l'endomorphisme adjoint de ψ , c'est-à-dire l'unique endomorphisme tel qu'on ait $\vec{x} \cdot \psi(\vec{y}) = \psi^*(\vec{x}) \cdot \vec{y}$ quels que soient \vec{x} et \vec{y} dans \mathcal{E} . Un endomorphisme ψ est dit *symétrique* si et seulement si $\psi^* = \psi$.

On réservera le nom de triangle aux triangles non dégénérés, c'est-à-dire dont les trois sommets sont distincts et non alignés.

On appelle *coordonnées barycentriques* d'un point M relativement à un triangle ABC , les trois nombres réels λ , μ et ν tels que $\lambda + \mu + \nu = 1$ et que M soit le barycentre des points A , B et C affectés des coefficients λ , μ et ν . On rappelle qu'un point M est *intérieur au triangle* ABC si et seulement si ses coordonnées barycentriques relativement au triangle sont strictement positives.

Les parties **I** et **II** sont indépendantes.

Préliminaires

1. Montrer qu'un endomorphisme linéaire ψ de \mathcal{E} est symétrique s'il existe une base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ de \mathcal{E} telle que $\vec{u} \cdot \psi(\vec{v}) = \psi(\vec{u}) \cdot \vec{v}$.

2. Montrer que l'inverse d'un automorphisme linéaire symétrique de \mathcal{E} est symétrique.

3. Soit ABC un triangle et M un point du plan. Montrer que si λ , μ et ν ne sont pas tous nuls et vérifient $\lambda\vec{MA} + \mu\vec{MB} + \nu\vec{MC} = \vec{0}$, alors on a $\lambda + \mu + \nu \neq 0$.

Partie I

Points isogonaux relativement à un triangle

Soit ABC un triangle du plan \mathcal{A} . On note a, b et c les affixes des points A, B et C , et P le polynôme unitaire ayant a, b et c pour racines. Deux points M et N , distincts ou confondus, sont dits *isogonaux* (resp. *strictement isogonaux*) relativement à ce triangle s'ils sont distincts de A, B et C et si on a :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC}) \pmod{\pi} \text{ (resp. } \pmod{2\pi});$$

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}) = (\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BA}) \pmod{\pi} \text{ (resp. } \pmod{2\pi});$$

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}) = (\overrightarrow{CN}, \overrightarrow{CB}) \pmod{\pi} \text{ (resp. } \pmod{2\pi}).$$

1. Soit M et N deux points distincts ou confondus, d'affixes respectives m et n , et soit Q le polynôme $Q(z) = (z - m)(z - n)$. Montrer que M et N sont isogonaux relativement au triangle ABC si et seulement si il existe des nombres réels non nuls α, β et γ tels que $Q(a) = \alpha P'(a)$, $Q(b) = \beta P'(b)$ et $Q(c) = \gamma P'(c)$ et que ces points sont strictement isogonaux si et seulement si α, β et γ sont strictement positifs.

2. On suppose que les points M et N , d'affixes m et n , sont isogonaux relativement au triangle ABC .

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{Q(z)}{P(z)}$. En déduire que les nombres α, β et γ de la question précédente vérifient $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

2. Établir que $\frac{\alpha}{m-a} + \frac{\beta}{m-b} + \frac{\gamma}{m-c} = 0$ et $\frac{\alpha}{n-a} + \frac{\beta}{n-b} + \frac{\gamma}{n-c} = 0$.

3. Exprimer les coordonnées barycentriques des points M et N relativement au triangle ABC . En déduire que ces points appartiennent au complémentaire dans \mathcal{A} de la réunion des droites (AB) , (BC) et (CA) et qu'ils sont strictement isogonaux si et seulement si ils appartiennent à l'intérieur du triangle ABC .

3. Soit α, β et γ trois réels non nuls, de somme égale à 1. On pose :

$$Q(z) = \alpha(z - b)(z - c) + \beta(z - a)(z - c) + \gamma(z - a)(z - b).$$

Soit m et n les racines de ce polynôme, avec éventuellement $m = n$. Montrer que les points M et N d'affixes respectives m et n sont isogonaux relativement au triangle ABC .

4. Soit M un point du plan \mathcal{A} . On note m son affixe et (λ, μ, ν) ses coordonnées barycentriques relativement au triangle ABC .

1. Montrer qu'une condition nécessaire pour qu'il existe un point N tel que M et N soient isogonaux relativement au triangle ABC est que l'on ait :

$$\lambda \neq 0, \quad \mu \neq 0, \quad \nu \neq 0 \tag{C1}$$

$$\lambda|m - a|^2 + \mu|m - b|^2 + \nu|m - c|^2 \neq 0. \tag{C2}$$

2. Montrer que si M vérifie ces conditions, il existe un point N et un seul tel que M et N soient isogonaux relativement au triangle ABC .

3. Justifier que tout point M de l'intérieur Δ du triangle ABC vérifie les conditions du I.4.1 et que le point N associé à M appartient à Δ . Montrer que l'application g qui associe N à M est un difféomorphisme involutif de Δ sur lui-même.

4. Montrer que la condition (C2) est équivalente à :

$$\det \begin{vmatrix} m - a & m - b & m - c \\ \bar{m} - \bar{a} & \bar{m} - \bar{b} & \bar{m} - \bar{c} \\ |m - a|^2 & |m - b|^2 & |m - c|^2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Développer ce déterminant [on pourra, pour alléger les calculs, supposer que l'origine est en A , c'est-à-dire faire $a = 0$].

5. Décrire l'ensemble des points de \mathcal{A} vérifiant les conditions du I.4.1.

Partie II

Triangles orthologiques

Étant donné deux triangles ABC et $A'B'C'$ du plan \mathcal{A} , on note :

— δ_A, δ_B et δ_C les droites passant respectivement par A, B et C et perpendiculaires respectivement aux droites $(B'C'), (C'A')$ et $(A'B')$;

— $\delta_{A'}, \delta_{B'}$ et $\delta_{C'}$ les droites passant respectivement par A', B' et C' et perpendiculaires respectivement aux droites $(BC), (CA)$ et (AB) ;

— f l'application affine de \mathcal{A} dans lui-même transformant A en A', B en B' et C en C' et φ l'application linéaire associée à f .

On dit que le triangle $A'B'C'$ est *orthologique* au triangle ABC si les droites δ_A, δ_B et δ_C sont concourantes.

1. Soit ABC et $A'B'C'$ deux triangles du plan \mathcal{A} .

1. Montrer que l'application Φ de \mathcal{A} dans \mathbb{R} définie par :

$$\Phi(M) = \overline{AM} \cdot \overline{B'C'} + \overline{BM} \cdot \overline{C'A'} + \overline{CM} \cdot \overline{A'B'}$$

est constante sur \mathcal{A} .

2. Montrer que cette constante est égale à $\overline{CA} \left([\varphi - \varphi^*](\overline{AB}) \right)$.

3. On suppose que le triangle $A'B'C'$ est orthologique au triangle ABC et on note O le point de concours des droites δ_A, δ_B et δ_C . Montrer que $\Phi(O) = 0$. En déduire que φ est symétrique.

4. Réciproquement, montrer que si φ est symétrique, alors le triangle $A'B'C'$ est orthologique au triangle ABC .

2. Montrer que si $A'B'C'$ est orthologique au triangle ABC , alors ABC est orthologique au triangle $A'B'C'$. Quelle relation y a-t-il entre le point de concours O des droites δ_A , δ_B et δ_C et le point de concours O' des droites $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$ et $\delta_{C'}$?

La relation « $A'B'C'$ est orthologique au triangle ABC » est donc symétrique. On dira désormais : « Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont orthologiques ».

3. Soit ABC un triangle et soit A' , B' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont orthologiques. Préciser les points de concours des droites δ_A , δ_B et δ_C et des droites $\delta_{A'}$, $\delta_{B'}$ et $\delta_{C'}$. Identifier l'application affine f transformant les points A , B et C en les points A' , B' et C' .

Partie III

Isogonie et orthologie

Étant donné deux points distincts X et Y du plan, on note σ_{XY} la symétrie orthogonale par rapport à la droite (XY) . Soit ABC un triangle et M un point n'appartenant pas aux droites (AB) , (BC) et (CA) . On pose $A' = \sigma_{BC}(M)$, $B' = \sigma_{CA}(M)$ et $C' = \sigma_{AB}(M)$.

1. À quelle condition les points A' , B' et C' forment-ils un triangle ? Cette condition étant remplie, montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont orthologiques.

On suppose dans ce qui suit que $A'B'C'$ est un triangle. On note N le point de concours des droites δ_A , δ_B et δ_C .

2. Quelle est la nature de l'application affine $\sigma_{CA} \circ \sigma_{AB}$? En déduire que le point N est le centre du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$.

3. Montrer que $\sigma_{AB} \circ \sigma_{AN} \circ \sigma_{AC} = \sigma_{AM}$. En déduire que M et N sont isogonaux relativement au triangle ABC . Que peut-on dire du centre du cercle circonscrit et de l'orthocentre d'un triangle ?

4. On suppose que M est intérieur au triangle ABC et on note I , J et K les points d'intersections respectivement des droites (NA') et (BC) , des droites (NB') et (CA) et des droites (NC') et (AB) . Soit r le rayon du cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$.

1. Montrer que $MI + IN = r$. En déduire qu'il existe une ellipse Γ de foyers M et N qui passe par les points I , J et K .

2. Montrer que Γ est tangente aux trois côtés du triangle ABC .

5. Réciproquement, montrer que les foyers d'une ellipse tangente aux côtés d'un triangle ABC sont strictement isogonaux relativement à ce triangle.