Concours du C.A.P.E.S
Première Epreuve

(Analyse) Session 1998 externe

http://www.archimaths.net/

Objet et notations du problème

Soit f une fonction numérique réelle, définie et continue sur un intervalle $I =]\alpha, \beta[$, où $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose que l'ensemble $\Omega = \{x \in I | f(x) = x\}$ des points fixes de f est non vide. On appellera *suite récurrente* ou, s'il faut éviter une ambiguïté, *suite récurrente associée à* f, une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de I vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n).$$

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de ces suites.

Partie I
Existence et convergence des suites récurrentes

1. On définit par récurrence des parties I_p de I par :

$$\begin{cases} I_1 = 1 \\ \forall p \geqslant 1, \quad I_{p+1} = f^{-1}(I_p). \end{cases}$$

1. Montrer que I_p est ouvert dans $\mathbb{R}$, qu'on a $I_{p+1} \subset I_p$ pour tout $p \geqslant 1$ et que $A = \bigcap_{p \geqslant 1} I_p$ est une partie non vide de I, stable par f.

2. Montrer que, quel que soit l'entier naturel $p \geqslant 1$, toute suite récurrente associée à f prend ses valeurs dans I_p. En déduire qu'on définit une suite récurrente associée à f par la donnée de la valeur initiale x_0 si et seulement si x_0 appartient à A et qu'alors tous les éléments de la suite appartiennent à A.

3. Vérifier qu'on définit par récurrence des applications continues f^p de I_p dans $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} & f^1 = f \\ \forall p \geqslant 1, \forall x \in I_{p+1}, & f^{p+1}(x) = f^p(f(x)). \end{cases}$$

Montrer que pour toute suite récurrente associée à f et pour tout entier $p \geqslant 1$, on a :

$$\forall n \geqslant 0, \quad x_{n+p} = f^p(x_n).$$

4. Déterminer les parties Ω et A pour chacun des exemples suivants :

i. $I =]0,2[$ et $\forall x \in]0,2[$, $f(x) = \sqrt{x}$.

ii. $I =]0,2[$ et $\forall x \in]0,2[$, $f(x) = x^2$.

iii. $I =]0,2[$ et $\forall x \in]0,2[$, $f(x) = 2x - 1$.

2. On suppose que f est croissante.

Soit x_0 un point de A tel que $x_0 \leqslant f(x_0)$. Montrer que la suite récurrente de valeur initiale x_0 converge vers un point de I si et seulement si x_0 est majoré par un point fixe de f ; caractériser alors la limite de la suite. Préciser le comportement de la suite quand elle ne converge pas vers un point de I.

Étudier de même le cas où $x_0 \geqslant f(x_0)$.

3. Soit r un point fixe de f. On suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $|f'(r)| < 1$. Un tel point fixe sera dit *attractif.*

1. Montrer qu'il existe une constante $k < 1$ et un réel $\varepsilon > 0$ tels que $V_\varepsilon =]r-\varepsilon, r+\varepsilon[$ soit inclus dans I et que :

$$\forall x \in V_\varepsilon, \quad |f(x) - r| \leqslant k|x - r|.$$

2. Montrer qu'une suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r si et seulement si il existe un indice N tel que $x_N \in V_\varepsilon$.

En déduire que le sous-ensemble A_r des points de A qui sont valeur initiale d'une suite récurrente convergeant vers r est ouvert dans $\mathbb{R}$ [on pourra montrer que l'image réciproque de V_ε par une application f^p est incluse dans A].

4. Soit r un point fixe de f. On suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $|f'(r)| > 1$. Un tel point fixe sera dit *répulsif.*

1. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $V_\varepsilon =]r-\varepsilon, r+\varepsilon[$ soit inclus dans I et que :

$$\forall x \in V_\varepsilon, \quad |f(x) - r| \geqslant |x - r|.$$

2. Montrer qu'une suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers r si et seulement si elle est *stationnaire* de valeur r, c'est-à-dire s'il existe un indice N tel que $x_n = r$ pour tout $n \geqslant N$.

5. On considère la fonction f définie sur $I =]0,2[$ par :

$$\forall x \in]0,2[, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}(4 - x^2).$$

1. Montrer que f a un seul point fixe et qu'il est répulsif.

2. Déterminer les points fixes de $f \circ f$.

3. Préciser, suivant la valeur initiale, le comportement des suites récurrentes associées à f.

Partie II
Vitesse de convergence
en un point fixe attractif

On se propose d'étudier la vitesse de convergence d'une suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non stationnaire, convergeant vers un point fixe attractif r.

1. Montrer qu'il existe une constante $k < 1$ et un entier N tels que :

$$\forall n \geqslant N, \quad |x_n - r| \leqslant k^{n-N}|x_N - r|.$$

En déduire que $|x_n - r| = O(k^n)$.

2. On suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que $f'(r) \neq 0$.

1. Montrer, grâce à la formule de Taylor, qu'on a :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad x_{j+1} - r = f'(r)(x_j - r)(1 + R_j)$$

avec $R_j = O(k^j)$. En déduire que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad x_n - r = (f'(r))^n(x_0 - r)\prod_{j=0}^{n-1}(1 + R_j).$$

2. Montrer que la série de terme général $\ln(|1 + R_j|)$ est définie et qu'elle converge. En déduire que la suite de terme général $\displaystyle\prod_{j=0}^{n}(1 + R_j)$ est convergente et que sa limite est non nulle. Conclure qu'il existe une constante $\varpi(x_0) \neq 0$, dépendant de la valeur initiale x_0 de la suite, telle que $x_n - r$ soit équivalent à $\varpi(x_0)(f'(r))^n$ quand n tend vers l'infini.

3. On suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$, que $f'(r) = 0$ et que $f''(r) \neq 0$.

1. Montrer, grâce à une formule de Taylor, qu'on a :

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad x_{j+1} - r = \frac{f''(r)}{2}(x_j - r)^2(1 + S_j)$$

avec $\lim\limits_{j\to\infty} S_j = 0$. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$ on a :

$$x_n - r = \frac{2}{f''(r)} \left(\frac{f''(r)}{2}(x_0 - r) \prod_{j=0}^{n-2} |1 + S_j|^{2^{-j-1}} \right)^{2^n} (1 + S_{n-1}).$$

2. Montrer que la suite de terme général $\prod\limits_{j=0}^{n-2} |1 + S_j|^{2^{-j-1}}$ est convergente et que sa limite est non nulle.

3. On pose $\pi_n = \lim\limits_{m\to+\infty} \prod\limits_{j=n-1}^{m} |1 + S_j|^{2^{-j-1}}$. Montrer que $2^n \ln \pi_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. En déduire qu'il existe une constante $\lambda(x_0) \in]0, 1[$, dépendant de la valeur initiale x_0 de la suite, telle que $x_n - r$ soit équivalent à $\frac{2}{f''(r)}(\lambda(x_0))^{2^n}$ quand n tend vers l'infini.

Partie III
Un exemple : les suites de Héron

Un nombre réel $a > 0$ étant fixé, on associe à tout entier naturel $p \geqslant 2$ la fonction f_p définie sur $I =]0, +\infty[$ par $f_p(x) = \frac{1}{p}\left((p-1)x + \frac{a}{x^{p-1}}\right)$.

1. Vérifier que la fonction f_p satisfait aux hypothèses de la partie **II**, question **II.3**. Montrer que, quelle que soit la valeur initiale $x_0 > 0$, la suite récurrente associée à f_p, existe, qu'elle vérifie $x_n \geqslant a^{1/p}$ pour tout $n \geqslant 1$ et qu'elle converge vers $a^{1/p}$.

Étant donné une suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non stationnaire associée à f_p, on notera $\lambda_p(x_0)$ la constante, dépendant de la valeur initiale x_0 de la suite, telle que $x_n - a^{1/p} \sim \frac{2}{f_p''(a^{1/p})}(\lambda_p(x_0))^{2^n}$.

2. On suppose que $p = 2$. Montrer qu'on peut écrire x_n sous la forme $\frac{u_n}{v_n}$, où v_n et v_n sont définis par $u_0 = x_0$, $v_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + a v_n^2 \\ v_{n+1} = 2u_n v_n. \end{cases}$$

Exprimer $u_n + \sqrt{a} v_n$, $u_n - \sqrt{a} v_n$ puis x_n en fonction de x_0, $\sqrt{a}$ et n. En déduire que :

$$\lambda_2(x_0) = \frac{|x_0 - \sqrt{a}|}{x_0 + \sqrt{a}}.$$

3. Un nombre réel $r > 0$ étant fixé, on associe à tout entier naturel $q > 1$ la fonction g_q définie sur $]0, +\infty[$ par $g_p(x) = \left[\frac{1}{2}\left(x^q + \frac{r^{2q}}{x^q}\right)\right]^{1/q}$.

1. Montrer que, quelle que soit la valeur initiale $y_0 > 0$, la suite récurrente $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ assicée à g_q existe ; donner l'expression de y_n en fonction de y_0, r et n. Montrer que, si cette suite n'est pas stationnaire, il existe deux constantes non nulles μ_q et C, qu'on explicitera en fonction de r, q et y_0, telles que $y_n - r \sim C(\mu_q)^{2^n}$.

2. On pose $r = a^{1/p}$. Montrer qu'on a alors $f_p(x) \leqslant g_{p-1}(x)$ pour tout $x \geqslant a^{1/p}$ (on pourra, après l'avoir justifiée, utiliser la concavité de la fonction $t \longmapsto \left(p - 1 + t^{\frac{p}{2(p-1)}}\right)^{p-1}$ sur l'intervalle $]0, 1[$).

3. On suppose que $x_0 > a^{1/p}$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites récurrentes de même valeur initiale x_0, associées respectivement à f_p et g_{p-1}. Montrer qu'on a $a^{1/p} < x_n \leqslant y_n$ pour tout n. En déduire une majoration explicite de $\lambda_p(x_0)$.

4. On suppose maintenant que $0 < x_0 < a^{1/p}$. Montrer qu'on a $\lambda_p(x_1) = (\lambda_p(x_0))^2$. En déduire une majoration de $\lambda_p(x_0)$.

Partie IV
Vitesse de convergence en un point fixe non attractif

On suppose que f est de classe C^{p+1}, que r est un point fixe tel que $|f'(r)| = 1$ et que p est le plus petit entier naturel supérieur ou égal à 1 tel que $f^{(p+1)}(r) \neq 0$. On se propose d'étudier la vitesse de convergence d'une suite récurrente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, non stationnaire, convergeant vers r.

1. On suppose que $f'(r) = 1$.

1. Étudier, en fonction de la parité de $p+1$ et du signe de $f^{(p+1)}(r)$, l'existence et, s'il y a lieu, le comportement d'une suite récurrente non stationnaire convergeant vers r.

2. Montrer que dans tous les cas où une telle suite existe, on peut se ramener par un changement de variable simple au cas où $r = 0$, $f^{(p+1)}(0) < 0$ et où il existe un réel $\varepsilon_0 > 0$ et un entier naturel N_0 tels que f soit définie et croissante sur $]0, \varepsilon_0[$ et que la sous-suite $(x_n)_{n \geqslant N_0}$ prenne ses valeurs dans $]0, \varepsilon_0[$.

2. On se place dans le cas particulier décrit au **IV.1.2.**

1. Étant donné un nombre réel $a > 0$, montrer que les suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout $\alpha > 0$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = (an+\alpha)^{-1/p}$$

sont les suites récurrentes associées à une fonction croissante g_a, définie et continue sur $]0, +\infty[$, que l'on explicitera.

2. Montrer que, si a et b sont deux réels strictement positifs vérifiant :

$$-a < \frac{p}{(p+1)!} f^{(p+1)}(0) < -b,$$

il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$, avec $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, tel que :

$$\forall x \in]0, \varepsilon[, \quad g_a(x) \leqslant f(x) \leqslant g_b(x).$$

En déduire qu'il existe un entier naturel N tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (ak + x_N^{-p})^{-1/p} \leqslant x_{N+k} \leqslant (bk + x_N^{-p})^{-1/p}.$$

3. Montrer que $n^{1/p}x_n$ a une limite, que l'on explicitera, quand n tend vers l'infini.

3. On suppose que r est quelconque, que $f'(r) = 1$ et que $f^{(p+1)}(r) \neq 0$.
Montrer qu'il existe une constante non nulle D, que l'on explicitera, telle que $x_n - r$ soit équivalent à $\dfrac{D}{n^{1/p}}$.

4. On suppose que r est quelconque, que $f'(r) = -1$ et que $f^{(p+1)}(r) \neq 0$.

1. Existe-t-il toujours des suites récurrentes non stationnaires convergeant vers r ?

2. Quand une telle suite existe, que peut-on dire de sa vitesse de convergence ?