Concours du C.A.P.E.S
Deuxième Epreuve

(Algèbre et Géométrie) Session 1999 externe

http://www.archimaths.net/

NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLÈME

Dans tout le problème, la lettre n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

On note :

$\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels ;

$\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres entiers relatifs ;

$\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Les lettres p et q désignant des nombres entiers relatifs, on note :

$[\![p, q]\!]$ l'ensemble des nombres entiers relatifs compris (au sens large) entre les nombres p et q, autrement dit :

$$[\![p, q]\!] = \{m\,;\, m \in \mathbb{Z} \mid p \leqslant m \text{ et } m \leqslant q\}.$$

Par ailleurs, on note :

$\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'ensemble $[\![1, n]\!]$;

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ;

I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;

et, si (k, ℓ) appartient à $[\![1, n]\!]^2$:

$\mathrm{E}_{k\ell}$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient situé sur la k-ième ligne et la ℓ-ième colonne vaut 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls.

On rappelle que la famille $(\mathrm{E}_{k\ell})_{(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note enfin :

$$\mathrm{M} = (m_{ij}), \text{ ou } \mathrm{M} = (m_{i,j}) \text{ en cas d'ambiguïté, la matrice } \mathrm{M} = \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} m_{ij}\,\mathrm{E}_{ij}.$$

La lettre K désignant un réel, on définit les ensembles :

- $\mathrm{L_K} = \{\mathrm{M}\,;\, \mathrm{M} = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = \mathrm{K}\}$;
- $\mathrm{L} = \bigcup_{\mathrm{K} \in \mathbb{R}} \mathrm{L_K}$;
- $\mathrm{C_K} = \{\mathrm{M}\,;\, \mathrm{M} = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall\, j \in [\![1, n]\!],\ \sum_{i=1}^{n} m_{ij} = \mathrm{K}\}$;
- $\mathrm{C} = \bigcup_{\mathrm{K} \in \mathbb{R}} \mathrm{C_K}$.

Une matrice $\mathrm{M} = (m_{ij})$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite matrice *magique* d'ordre n lorsqu'elle vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\{m_{ij}\,;\,(i, j) \in [\![1, n]\!]^2\} = [\![1, n^2]\!] \qquad \mathbf{P_1}$$

$$\exists\, \mathrm{K} \in \mathbb{R},\ \mathrm{M} \in \mathrm{L_K} \cap \mathrm{C_K} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} m_{kk} = \sum_{k=1}^{n} m_{k,\,n+1-k} = \mathrm{K} \qquad \mathbf{P_2}$$

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés des matrices appartenant à $\mathrm{L} \cap \mathrm{C}$ et des matrices magiques d'ordre n, avec, notamment, une construction de certaines d'entre elles dans le cas où n est impair.

Les cinq parties du problème peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

QUESTION PRÉLIMINAIRE

Montrer que, si M est une matrice magique d'ordre n, le réel K dont la propriété $\mathbf{P_2}$ affirme l'existence vaut nécessairement $\dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

Dans toute la suite du problème, on note $K_n = \dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

PARTIE I

ÉTUDE DES MATRICES MAGIQUES D'ORDRES 2 ET 3

I.1. Montrer qu'il n'existe pas de matrice magique d'ordre 2.

I.2. Soit $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ une matrice magique d'ordre 3.

I.2.*a*. Établir l'inclusion de l'ensemble $\{1, 9\}$ dans l'ensemble $\{a_{12}, a_{21}, a_{23}, a_{32}\}$.

I.2.*b*. En déduire l'ensemble des matrices magiques d'ordre 3.

PARTIE II

ÉTUDE DE L'ESPACE VECTORIEL $L \cap C$

II.1.

II.1.*a*. Montrer que L_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et qu'il est engendré par la famille de matrices $(E_{ij} - E_{in})_{(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n-1]\!]}$. Préciser la dimension de L_0.

II.1.*b*. Soit K un réel. Montrer que, quelle que soit la matrice M appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M appartient à L_K si et seulement si $M - KI_n$ appartient à L_0.

II.1.*c*. En déduire que L est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension.

II.2.

II.2.*a*. Montrer que, quelle que soit la matrice $M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} m_{ij}(E_{ij} - E_{in})$ appartenant à L_0, M appartient à C_0 si et seulement si, pour tout j appartenant à $[\![1, n-1]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 0$.

II.2.*b*. En déduire une base et la dimension de $L_0 \cap C_0$ (après avoir succinctement justifié que $L_0 \cap C_0$ est un espace vectoriel).

II.3.

II.3.*a*. Montrer que, quelle que soit la matrice M appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, M appartient à $L \cap C$ si et seulement s'il existe un réel K tel que M appartienne à $L_K \cap C_K$.

II.3.*b*. En déduire la dimension de l'espace $L \cap C$.

PARTIE III

EXEMPLE DE GROUPE OPÉRANT SUR L'ENSEMBLE DES MATRICES MAGIQUES D'ORDRE n

Soit $\mathscr{E}$ un plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $\mathscr{R} = (\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère un carré ABCD de centre O tel que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\vec{u}$ d'une part, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ et $\vec{v}$ d'autre part, soient colinéaires.

On note $\mathscr{I}$ l'ensemble des isométries de $\mathscr{E}$ qui laissent le carré ABCD globalement invariant.

On note Ω le point de $\mathscr{E}$ vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{O}\Omega} = -\dfrac{n+1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$ et $\mathscr{R}'$ le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$.

III.1.

III.1.*a*. Soit f un élément de $\mathscr{I}$. Montrer qu'il existe un couple $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ appartenant à $\{-1, 1\}^2$ tel que, pour tout point N de $\mathscr{E}$ de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathscr{R}$, les coordonnées (x', y') du point $f(\mathrm{N})$ dans le repère $\mathscr{R}$ vérifient :

$$\begin{cases} x' = \varepsilon_1 x, \\ y' = \varepsilon_2 y, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x' = \varepsilon_1 y, \\ y' = \varepsilon_2 x. \end{cases}$$

Reconnaître toutes les isométries du plan $\mathscr{E}$ ainsi définies.

III.1.*b*. Soit N le point de $\mathscr{E}$ de coordonnées (X, Y) dans le repère $\mathscr{R}'$. Pour chaque élément f de $\mathscr{I}$, exprimer les coordonnées $(\mathrm{X}', \mathrm{Y}')$ du point $f(\mathrm{N})$ dans le repère $\mathscr{R}'$ en fonction de X et de Y.

III.2. Soit f un élément de $\mathscr{I}$. On considère l'application φ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ qui, à un couple (s, t) de réels, associe le couple des coordonnées dans le repère $\mathscr{R}'$ de l'image par f^{-1} du point de coordonnées (s, t) dans ce même repère.

III.2.*a*. Montrer que, quel que soit le couple (i, j) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$, le couple $\varphi(i, j)$ appartient à $[\![1, n]\!]^2$.

III.2.*b*. Soit Φ_f l'application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même qui, à une matrice $\mathrm{M} = (m_{ij})$, associe la matrice $\Phi_f(\mathrm{M}) = (m'_{ij})$ vérifiant, pour tout (i, j) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$, $m'_{ij} = m_{k\ell}$, le couple (k, ℓ) étant égal à $\varphi(i, j)$.

Montrer que l'application Φ_f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

III.3. Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble $\{\Phi_f ; f \in \mathscr{I}\}$. Montrer que $(\mathscr{F}, \circ)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\mathscr{I}, \circ)$. (*Le symbole* $\circ$ *désigne la composition des applications.*)

III.4.

III.4.*a*. Vérifier que l'image d'une matrice magique d'ordre n quelconque par un élément de $\mathscr{F}$ quelconque est une matrice magique d'ordre n.

III.4.*b*. Soient f et g des éléments de $\mathscr{I}$. Montrer que, s'il existe une matrice magique M d'ordre n telle que $\Phi_f(\mathrm{M}) = \Phi_g(\mathrm{M})$, alors $f = g$.

III.4.*c*. Montrer que l'ensemble des matrices magiques d'ordre n est fini et que son cardinal est un multiple de 8.

PARTIE IV

ÉTUDE D'UN GROUPE ASSOCIÉ À CERTAINES PERMUTATIONS DE $[\![1, n]\!]$

Étant donnée une permutation quelconque σ de $[\![1, n]\!]$, on note A_σ la matrice (a_{ij}) appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifiant, pour tout (i, j) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$, $a_{ij} = \delta_{\sigma(i), j}$, ce dernier symbole (dit « de Kronecker ») étant défini par la relation :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j, \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble $\{A_\sigma ;\ \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$.

IV.1. Soient σ un élément de $\mathfrak{S}_n$ et $M = (m_{ij})$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Expliciter le terme général de la matrice $A_\sigma M$, puis le terme général de la matrice $M A_\sigma$.

IV.2. Montrer que $(\mathcal{S}, \times)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$.
(*Le symbole* $\times$ *désigne la multiplication matricielle.*)

IV.3.

IV.3.*a*. Soit K un réel. Montrer que, pour toute matrice M appartenant à $L_K \cap C_K$ et toutes permutations σ et σ' de $[\![1, n]\!]$, $A_\sigma M A_{\sigma'}$ appartient à $L_K \cap C_K$.

IV.3.*b*. On note $\mathfrak{T}_n$ l'ensemble des permutations σ de $[\![1, n]\!]$ telles que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \sigma(n + 1 - k) = n + 1 - \sigma(k).$$

Soit σ un élément de $\mathfrak{T}_n$.
Montrer que, si M est une matrice magique d'ordre n, alors $A_\sigma M A_{\sigma^{-1}}$ en est aussi une.

IV.4. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble $\{A_\sigma ; \sigma \in \mathfrak{T}_n\}$.

IV.4.*a*. Montrer que $(\mathcal{T}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{S}, \times)$.

IV.4.*b*. Déterminer le nombre d'éléments de $\mathcal{T}$.

V.A. Cas où n n'est pas multiple de 3.

On suppose dans cette section V.A. que n est un entier impair non multiple de 3.

On dit que deux entiers p et q sont *congrus modulo* n, et l'on note $p \equiv q\ [n]$, lorsque n divise $p-q$.

V.A.1. Montrer qu'il existe un entier m premier avec n tel que, pour tout quadruplet (i, j, k, ℓ) appartenant à $\mathbb{Z}^4$,

$$\begin{cases} k \equiv 2i+j\ [n], \\ \ell \equiv i+2j\ [n], \end{cases} \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} i \equiv m(2k-\ell)\ [n], \\ j \equiv m(2\ell-k)\ [n]. \end{cases}$$

Ainsi, pour tout couple (k, ℓ) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$, il existe un et un seul couple (i, j) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$ tel que :

$$\begin{cases} k \equiv 2i+j\ [n], \\ \ell \equiv i+2j\ [n]. \end{cases}$$

On note alors $i = \alpha(k, \ell)$ et $j = \beta(k, \ell)$.

V.A.2. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'anneau quotient de $\mathbb{Z}$ par l'idéal $n\mathbb{Z}$ et, si x est élément de $\mathbb{Z}$, $\dot{x}$ la classe d'équivalence de x dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

V.A.2.*a*. Soient u et v deux entiers relatifs, u non nul. Montrer que, si u et n sont premiers entre eux, l'application $x \mapsto \dot{u}x + \dot{v}$ est une bijection de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur lui-même.

V.A.2.*b*. En déduire que, pour tout ℓ appartenant à $[\![1, n]\!]$, la somme $\sum_{k=1}^{n} \alpha(k, \ell)$ est constante (préciser sa valeur en fonction de n).

Soit $W = (w_{i,j})$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifiant, pour tout (i, j) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$:

$$w_{i,j} = n(i-1)+j.$$

Soit $G = (g_{k,\ell})$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifiant, pour tout (k, ℓ) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$:

$$g_{k,\ell} = w_{\alpha(k,\ell),\, \beta(k,\ell)}.$$

V.A.3. Construire G dans le cas où $n = 5$.

Dans la suite, l'entier n n'est plus supposé égal à 5.

V.A.4.

V.A.4.*a*. Montrer que l'ensemble des coefficients de G est $[\![1, n^2]\!]$.

V.A.4.*b*. Montrer que G est une matrice magique d'ordre n.

V.A.5. Dans cette question, on établit une propriété supplémentaire de la matrice G.

Si i appartient à $[\![1, n]\!]$, on note $E_i = \{(k, \ell);\ (k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2 \mid k - \ell \equiv i\ [n]\}$.

V.A.5.*a*. Montrer que, pour tout i appartenant à $[\![1, n]\!]$, $\sum_{(k,\ell) \in E_i} g_{k\ell} = K_n$.

V.A.5.*b*. Déterminer n autres ensembles $F_1, F_2, \dots, F_n$, analogues aux ensembles $E_1, E_2, \dots, E_n$, tels que, pour tout i appartenant à $[\![1, n]\!]$, $\sum_{(k,\ell) \in F_i} g_{k\ell} = K_n$.

V.B. Composition de deux matrices magiques. Cas où n est multiple de 3.

Soient p et q deux entiers supérieurs ou égaux à 3.

À partir d'une matrice magique $A = (a_{k\ell})$ d'ordre p et d'une matrice magique $B = (b_{ij})$ d'ordre q, on considère la matrice carrée $D = (d_{uv})$ d'ordre pq vérifiant, pour tout (k, ℓ) appartenant à $[\![1, p]\!]^2$ et tout (i, j) appartenant à $[\![1, q]\!]^2$, $d_{(i-1)p+k,\,(j-1)p+\ell} = a_{k\ell} + (b_{ij} - 1)\,p^2$.

V.B.1. Construire D dans le cas particulier où les matrices A et B sont égales à $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

V.B.2. Montrer que, pour toutes matrices magiques A et B d'ordres respectifs p et q, D est une matrice magique d'ordre pq.

V.B.3. En déduire que, si n est un multiple de 3, l'ensemble des matrices magiques d'ordre n n'est pas vide.

V.A. Cas où n n'est pas multiple de 3.

On suppose dans cette section V.A. que n est un entier impair non multiple de 3.

On dit que deux entiers p et q sont *congrus modulo* n, et l'on note $p \equiv q\ [n]$, lorsque n divise $p-q$.

V.A.1. Montrer qu'il existe un entier m premier avec n tel que, pour tout quadruplet (i, j, k, ℓ) appartenant à $\mathbb{Z}^4$,

$$\begin{cases} k \equiv 2i + j\ [n], \\ \ell \equiv i + 2j\ [n], \end{cases} \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} i \equiv m(2k-\ell)\ [n], \\ j \equiv m(2\ell - k)\ [n]. \end{cases}$$

Ainsi, pour tout couple (k, ℓ) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$, il existe un et un seul couple (i, j) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$ tel que :

$$\begin{cases} k \equiv 2i + j\ [n], \\ \ell \equiv i + 2j\ [n]. \end{cases}$$

On note alors $i = \alpha(k, \ell)$ et $j = \beta(k, \ell)$.

V.A.2. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'anneau quotient de $\mathbb{Z}$ par l'idéal $n\mathbb{Z}$ et, si x est élément de $\mathbb{Z}$, $\dot{x}$ la classe d'équivalence de x dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

V.A.2.*a*. Soient u et v deux entiers relatifs, u non nul. Montrer que, si u et n sont premiers entre eux, l'application $x \mapsto \dot{u}x + \dot{v}$ est une bijection de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur lui-même.

V.A.2.*b*. En déduire que, pour tout ℓ appartenant à $[\![1, n]\!]$, la somme $\sum_{k=1}^{n} \alpha(k, \ell)$ est constante (préciser sa valeur en fonction de n).

Soit $W = (w_{i,j})$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifiant, pour tout (i, j) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$:

$$w_{i,j} = n(i-1) + j.$$

Soit $G = (g_{k,\ell})$ la matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et vérifiant, pour tout (k, ℓ) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$:

$$g_{k,\ell} = w_{\alpha(k,\ell),\, \beta(k,\ell)}.$$

V.A.3. Construire G dans le cas où $n = 5$.

Dans la suite, l'entier n n'est plus supposé égal à 5.

V.A.4.

V.A.4.*a*. Montrer que l'ensemble des coefficients de G est $[\![1, n^2]\!]$.

V.A.4.*b*. Montrer que G est une matrice magique d'ordre n.

V.A.5. Dans cette question, on établit une propriété supplémentaire de la matrice G.

Si i appartient à $[\![1, n]\!]$, on note $E_i = \{(k, \ell);\ (k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2 \mid k - \ell \equiv i\ [n]\}$.

V.A.5.*a*. Montrer que, pour tout i appartenant à $[\![1, n]\!]$, $\sum_{(k,\ell) \in E_i} g_{k\ell} = K_n$.

V.A.5.*b*. Déterminer n autres ensembles $F_1, F_2, \dots, F_n$, analogues aux ensembles $E_1, E_2, \dots, E_n$, tels que, pour tout i appartenant à $[\![1, n]\!]$, $\sum_{(k,\ell) \in F_i} g_{k\ell} = K_n$.

V.B. Composition de deux matrices magiques. Cas où n est multiple de 3.

Soient p et q deux entiers supérieurs ou égaux à 3.

À partir d'une matrice magique $A = (a_{k\ell})$ d'ordre p et d'une matrice magique $B = (b_{ij})$ d'ordre q, on considère la matrice carrée $D = (d_{uv})$ d'ordre pq vérifiant, pour tout (k, ℓ) appartenant à $[\![1, p]\!]^2$ et tout (i, j) appartenant à $[\![1, q]\!]^2$, $d_{(i-1)p+k,\,(j-1)p+\ell} = a_{k\ell} + (b_{ij} - 1)\,p^2$.

V.B.1. Construire D dans le cas particulier où les matrices A et B sont égales à $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

V.B.2. Montrer que, pour toutes matrices magiques A et B d'ordres respectifs p et q, D est une matrice magique d'ordre pq.

V.B.3. En déduire que, si n est un multiple de 3, l'ensemble des matrices magiques d'ordre n n'est pas vide.