Concours du C.A.P.E.S
Première Epreuve

(Analyse) Session 1999 externe

http://www.archimaths.net/

NOTATIONS ET OBJET DU PROBLÈME

On désigne par $\mathbb{N}$ *l'ensemble des entiers naturels et par* $\mathbb{R}$ *le corps des nombres réels.*

Pour tout entier n *supérieur ou égal à 1, on note* $\mathbb{R}_n[X]$ *l'espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à* n.

Pour tout élément P de $\mathbb{R}_n[X]$ *il existe* $n+1$ *réels* $a_0, a_1, \dots, a_n$ *tels que :*

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

On note P' *le polynôme dérivé du polynôme* P.

On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ *est un espace vectoriel normé avec :*

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \right\| = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|.$$

On note U_n *le sous-ensemble de* $\mathbb{R}_n[X]$ *formé des polynômes unitaires de degré n. Précisément un élément de* U_n *s'écrit* $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *avec* $a_n = 1$.

On définit l'application φ_n *de* $\mathbb{R}^n$ *(espace produit) dans* U_n *par :*

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \mapsto \varphi_n(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k).$$

On définit les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_{n,k}$ *par :*

$$\begin{array}{rl} \sigma_{n,0} : \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R}, \\ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) & \longmapsto 1, \end{array}$$

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \begin{array}{rl} \sigma_{n,k} : \mathbb{R}^n & \to \mathbb{R}, \\ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) & \longmapsto \displaystyle\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k}. \end{array}$$

L'objet du problème est l'étude d'une condition nécessaire puis d'une condition suffisante, portant sur les coefficients, pour qu'un polynôme réel ait toutes ses racines réelles.

Le résultat de la question I.1.1. est utilisé dans la partie II.

Les parties II et III sont indépendantes.

La partie IV utilise des résultats des parties II et III.

I. LA MÉTHODE DE NEWTON POUR LES ÉQUATIONS POLYNOMIALES

Pour cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2 et P *est un polynôme appartenant à* U_n *dont toutes les racines sont réelles. On suppose que* P *a au moins deux racines réelles distinctes et on note :*

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p$$

les racines réelles distinctes de P *avec* p *entier compris entre 2 et* n. *Pour tout entier* j *compris entre 1 et* p, *la racine* λ_j *est de multiplicité* m_j *supérieure ou égale à 1 avec :*

$$\sum_{j=1}^{p} m_j = n.$$

I.1.

I.1.1. Montrer que le polynôme dérivé P′ admet les réels $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ pour racines de multiplicités respectives $m_1 - 1, m_2 - 1, \ldots, m_p - 1$ (une multiplicité nulle signifie que λ_j n'est pas racine de P′) et des racines simples $\mu_j \in]\lambda_{j+1}, \lambda_j[$ avec $1 \leqslant j \leqslant p-1$.

I.1.2. Montrer que pour tout réel x strictement supérieur à λ_1 et tout entier k compris entre 0 et n, on a $P^{(k)}(x) > 0$, où $P^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de P.

I.2. *On définit la fonction* $g : [\lambda_1, +\infty[\to \mathbb{R}$ *par :*

$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} x - \dfrac{P(x)}{P'(x)} & \text{si } x > \lambda_1, \\ \lambda_1 & \text{si } x = \lambda_1. \end{cases}$$

I.2.1. Montrer que la fonction g est indéfiniment dérivable sur $[\lambda_1, +\infty[$.

I.2.2. Montrer que :

$$\forall x > \lambda_1, \quad \lambda_1 < g(x) < x. \tag{1}$$

Jusqu'à la fin de I.2, b *est un réel strictement supérieur à* λ_1. *On définit alors la suite* $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *par :*

$$\begin{cases} x_0 = b, \\ \forall k \geqslant 0, \quad x_{k+1} = g(x_k). \end{cases}$$

I.2.3. Montrer que cette suite converge en décroissant vers λ_1.

I.2.4. Montrer que :

$$\forall x > \lambda_1, \quad 1 - g'(x) = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{(x-\lambda_j)^2}}{\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{x-\lambda_j}\right)^2}. \tag{2}$$

I.2.5. Montrer que :

$$\forall x > \lambda_1, \quad \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{x-\lambda_j}\right)^2 \leqslant n \sum_{j=1}^{p} \frac{m_j}{(x-\lambda_j)^2}. \tag{3}$$

I.2.6. Déduire de ce qui précède que :

$$\forall x > \lambda_1, \quad 0 < g'(x) \leqslant 1 - \frac{1}{n}. \tag{4}$$

I.2.7. On suppose qu'on a trouvé un réel a inférieur ou égal à λ_1. Déduire de (4) une majoration de $|x_k - \lambda_1|$ pour tout entier k strictement positif en fonction de a, b, n et k.

I.3. *On désigne par :*

$$\rho_1 \geqslant \rho_2 \geqslant \ldots \geqslant \rho_n$$

les n *racines réelles distinctes ou confondues de* P *et on suppose qu'on a obtenu des valeurs approchées des* $m-1$ *premières racines* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{m-1}$ *avec* m *compris entre* 2 *et* n. *On se propose de déduire un calcul approché de* ρ_m. *Pour ce faire on définit le polynôme* P_{m-1} *par :*

$$P_{m-1}(X) = \frac{P(X)}{(X-\rho_1)\cdots(X-\rho_{m-1})}.$$

On définit la fonction $g_{m-1} :]\rho_m, +\infty[\to \mathbb{R}$ *par :*

$$\forall x > \rho_m, \quad g_{m-1}(x) = x - \frac{P_{m-1}(x)}{P'_{m-1}(x)}$$

et la suite $(x_k^{(m)})_{k \in \mathbb{N}}$ *par :*

$$\begin{cases} x_0^{(m)} = b_m, \\ \forall k \geq 0, \ x_{k+1}^{(m)} = g_{m-1}\left(x_k^{(m)}\right) \end{cases}$$

où b_m *est un réel strictement supérieur à* ρ_m.

I.3.1. Montrer que la suite $(x_k^{(m)})_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite.

I.3.2. Exprimer, pour tout réel x strictement supérieur à ρ_m, $\dfrac{P_{m-1}(x)}{P'_{m-1}(x)}$ en fonction de $P(x)$, $P'(x)$ et des $x - \rho_j$ $(1 \leq j \leq m-1)$.
Quel peut être l'intérêt d'une telle écriture ?

II. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES ÉLÉMENTAIRES

II.1.

II.1.1. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. On lui associe $\lambda' = (\lambda_1, ..., \lambda_{n-1})$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$. Exprimer, pour tout entier k compris entre 0 et n, $\sigma_{n,k}(\lambda)$ en fonction de λ_n et des $\sigma_{n-1,j}(\lambda')$ $(0 \leq j \leq n-1)$.

II.1.2. Montrer par récurrence que, pour tout entier n strictement positif, on a :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi_n(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sigma_{n,k}(\lambda) X^{n-k}.$$

II.2. Montrer que, pour tout entier n strictement positif, l'application φ_n est continue de $\mathbb{R}^n$ dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}_n[X]$.

II.3. Soient n un entier strictement positif, $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$ avec λ_k non nul pour tout entier k compris entre 1 et n et $P = \varphi_n(\lambda)$ avec $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ $(a_n = 1)$.

II.3.1. Montrer que a_0 est différent de 0.

On désigne par Q *le polynôme de degré* n *à coefficients réels défini pour* x *réel non nul par :*

$$x \mapsto Q(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right).$$

II.3.2. En écrivant :

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$$

exprimer les coefficients b_k $(0 \leq k \leq n)$ en fonction de coefficients a_j $(0 \leq j \leq n)$.

II.3.3. Déterminer δ appartenant à $\mathbb{R}^n$ tel que $\dfrac{1}{a_0} Q = \varphi_n(\delta)$.

II.3.4. Montrer que :

$$\forall k \in \{0, 1, ..., n\}, \quad \sigma_{n,k}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, ..., \frac{1}{\lambda_n}\right) = \frac{\sigma_{n,n-k}(\lambda)}{\sigma_{n,n}(\lambda)}. \qquad (5)$$

II.4. Soient n un entier supérieur ou égal à 2, $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$ et $P = \varphi_n(\lambda)$.

II.4.1. Montrer qu'il existe μ' appartenant à $\mathbb{R}^{n-1}$ tel que $\frac{1}{n} P' = \varphi_{n-1}(\mu')$.

II.4.2. Montrer que :

$$\forall k \in \{0, 1, ..., n-1\}, \quad \sigma_{n,k}(\lambda) = \frac{n}{n-k} \sigma_{n-1,k}(\mu').$$

II.5. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$.

II.5.1. Montrer que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

Préciser dans quel cas l'égalité est réalisée.

II.5.2. Montrer que :

$$(n-1)(\sigma_{n,1}(\lambda))^2 - 2n\,\sigma_{n,2}(\lambda) \geqslant 0. \qquad (6)$$

Préciser dans quel cas l'égalité est réalisée.

II.6. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$. Montrer que :

$$(n-1)(\sigma_{n,n-1}(\lambda))^2 - 2n\,\sigma_{n,n-2}(\lambda)\,\sigma_{n,n}(\lambda) \geqslant 0. \qquad (7)$$

Préciser dans quel cas l'égalité est réalisée. (On distinguera le cas où l'un des λ_i est nul du cas où tous les λ_i sont non nuls et dans ce dernier cas on peut utiliser (5) et (6)).

II.7. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et tout $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ appartenant à $\mathbb{R}^n$ on a :

$$\forall k \in \{1, 2, ..., n-1\}, \quad (\sigma_{n,k}(\lambda))^2 - \frac{n-k+1}{n-k}\,\frac{k+1}{k}\,\sigma_{n,k-1}(\lambda)\,\sigma_{n,k+1}(\lambda) \geqslant 0 \qquad (8)$$

en précisant dans quel cas l'égalité est réalisée (on peut procéder par récurrence sur $n \geqslant 2$ en utilisant le résultat de la question II.4.2. et l'inégalité (7)).

III. UN RÉSULTAT DE CONTINUITÉ DES RACINES D'UN POLYNÔME COMME FONCTIONS DES COEFFICIENTS

Pour cette partie, n est un entier strictement positif et P *désigne un polynôme de* $\mathbb{R}_n[X]$ *ayant n racines réelles distinctes :*

$$\lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_n.$$

III.1. Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que les intervalles $I_k = [\lambda_k - r, \lambda_k + r]$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ soient deux à deux disjoints.

III.2. Montrer que, pour tout entier k compris entre 1 et n, on peut trouver des réels a_k et b_k appartenant à I_k tels que :

$$\mathrm{P}(a_k)\,\mathrm{P}(b_k) < 0 .$$

III.3. *On note :*

$$[a, b] = [\lambda_n - r, \lambda_1 + r] ,$$

$$\alpha = \min\{|\mathrm{P}(a_1)|, \ldots, |\mathrm{P}(a_n)|, |\mathrm{P}(b_1)|, \ldots, |\mathrm{P}(b_n)|\}.$$

III.3.1. Montrer qu'il existe un réel β strictement positif tel que :

$$\forall\, \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n(\mathrm{X}), \quad \sup_{x \in [a,b]} |\mathrm{Q}(x)| \leqslant \beta\,|\mathrm{Q}|. \tag{9}$$

III.3.2. Soit Q appartenant à $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que $|\mathrm{Q} - \mathrm{P}| < \dfrac{\alpha}{\beta}$.

a. Montrer que :

$$\forall\, k \in \{1, \ldots, n\}, \quad \mathrm{Q}(a_k)\,\mathrm{Q}(b_k) < 0.$$

b. Montrer que le polynôme Q a n racines réelles distinctes.

On a donc montré le résultat suivant :

Si P *est un polynôme de* $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ *ayant* n *racines réelles distinctes, alors il existe un réel* ε *strictement positif tel que tout polynôme* $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n} b_k \mathrm{X}^k$ *appartenant à* $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ *et vérifiant* $|b_k - a_k| < \varepsilon$ *pour tout* k *compris entre* 0 *et* n, *admet* n *racines réelles distinctes.* (R 1)

IV. INÉGALITÉS DE NEWTON

Pour cette partie on suppose l'entier n *supérieur ou égal à* 2.

IV.1. Soit $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$ un polynôme de U_n $(a_n = 1)$ admettant n racines réelles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. En utilisant (8), montrer que nécessairement :

$$\forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \quad a_k^2 - \frac{n-k+1}{n-k}\,\frac{k+1}{k}\,a_{k-1}\,a_{k+1} \geqslant 0 \tag{R 2}$$

(inégalités de Newton). Préciser dans quel cas l'égalité est réalisée.

IV.2. *Étude d'un exemple*. Soient a un réel et P le polynôme :

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^5 + 5a\,\mathrm{X}^3 + a^2\mathrm{X} + 1 .$$

IV.2.1. Montrer que si P a 5 racines réelles alors a est strictement négatif.

IV.2.2. *On suppose que* a *est strictement négatif.*

a. Montrer que les inégalités (R 2) sont vérifiées.

On pose $a = -\dfrac{1}{b^2}$ *avec* b *strictement positif et :*

$$\mathrm{R}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^5 - 5\mathrm{X}^3 + \mathrm{X} + b^5,$$
$$\mathrm{S}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^5 - 5\mathrm{X}^3 + \mathrm{X}.$$

b. Montrer que P a 5 racines réelles si et seulement si R a 5 racines réelles.

c. Montrer que le polynôme dérivé S' a 4 racines réelles $-\alpha_1 < -\alpha_2 < \alpha_2 < \alpha_1$ et que $S(\alpha_2) < S(-\alpha_1)$.

d. En étudiant les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto S(x)$ montrer que P a 5 racines réelles distinctes si et seulement si $a < -\dfrac{1}{(S(\alpha_2))^{\frac{2}{5}}}$.

On admet le résultat suivant :

Si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *est un polynôme de* U_n *admettant* n *racines réelle strictement négatives, l'une d'elles étant de multiplicité supérieure ou égale à 2, alors :*

$$\exists\, k \in \{1, 2, ..., n-1\}\ ; \quad a_k^2 - 4a_{k-1}\, a_{k+1} \leqslant 0. \tag{R3}$$

IV.3. *Dans cette question on se propose de montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la propriété* $(\mathcal{P}_n)$ *suivante : si* $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *est un polynôme de* U_n $(a_n = 1)$ *vérifiant les conditions :*

$$\forall\, k \in \{0, 1, ..., n\}, \quad a_k > 0, \tag{H1}$$

$$\forall\, k \in \{1, 2, ..., n-1\}, \quad a_k^2 - 4a_{k-1}\, a_{k+1} > 0, \tag{H2}$$

alors toutes les racines de P *sont simples et réelles.*

IV.3.1. Montrer que si le polynôme P appartenant à U_n vérifie (H2) alors il vérifie (R2).

IV.3.2. Montrer la propriété $(\mathcal{P}_2)$.

Soit n *un entier supérieur ou égal à 3. On suppose que* $(\mathcal{P}_{n-1})$ *est vraie et on considère un polynôme* $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *appartenant à* U_n *vérifiant les conditions* (H1) *et* (H2) ; *on note alors* $Q = P - a_0$.

IV.3.3 Montrer que le polynôme Q admet n racines réelles simples, la plus grande étant 0.

Pour tout réel t *positif ou nul on pose :*

$$Q_t(X) = Q(X) + t,$$

on désigne par $N_t \in \mathbb{N}$ *le nombre de racines réelles distinctes de* Q_t *et on note :*

$$S = \{t > 0 \mid N_t < n\}.$$

IV.3.4. Calculer N_0.

IV.3.5. Montrer que S est non vide puis que S admet une borne inférieure $\alpha \geqslant 0$.

IV.3.6. En utilisant le résultat (R1) de la partie III, montrer que $\alpha > 0$.

IV.3.7. En utilisant le résultat (R1) de la partie III, montrer que $N_\alpha < n$.

IV.3.8.*a.* Montrer qu'il existe un réel M strictement positif tel que pour tout t dans $[0, \alpha[$ les n racines réelles de Q_t sont dans $[-M, 0]$.

Soit $(t_p)_{p \in \mathbb{N}}$ *une suite de réels appartenant à* $[0, \alpha[$ *qui converge vers* α. *Pour tout entier naturel* p *on note :*

$$\delta_{1,p} > \ldots > \delta_{n,p}$$

les n *racines réelles de* Q_{t_p} *et on pose* $\delta_p = (\delta_{1,p}, \ldots, \delta_{n,p}) \in \mathbb{R}^n$.

b. Montrer qu'on peut extraire de la suite $(\delta_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une sous-suite convergente. On note $(\delta_{\sigma(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ une telle sous-suite et $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ sa limite dans $\mathbb{R}^n$.

On note :

$$R(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - \delta_k).$$

c. Montrer que dans $\mathbb{R}_n[X]$ on a :

$$\lim_{p \to +\infty} Q_{t_{\sigma(p)}} = R.$$

d. Montrer que $R = Q_\alpha$.

e. Montrer que Q_α a toutes ses racines réelles strictement négatives, l'une d'elles étant de multiplicité supérieure ou égale à 2.

f. En utilisant le résultat (R3), montrer que nécessairement α est strictement supérieur à a_0 et conclure.

IV.4. En considérant le polynôme $P(X) = X^3 - 5X^2 + 6X + 1$, montrer que la propriété $(\mathcal{P}_n)$ n'est plus valable si on a l'hypothèse (H2) sans l'hypothèse (H1).

IV.5. Dans cette question on se propose de montrer que le coefficient 4 de (H2) ne peut pas être diminué, c'est-à-dire que pour tout réel γ strictement inférieur à 4 il existe un polynôme P appartenant à U_n à coefficients strictement positifs vérifiant :

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}, \quad a_k^2 - \gamma a_{k-1} a_{k+1} > 0 \qquad \text{(H3)}$$

et admettant des racines complexes non réelles.

IV.5.1. Montrer le résultat pour $n = 2$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On se donne un réel γ strictement inférieur à 4 et on suppose qu'on a trouvé un polynôme $B(X) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k$ appartenant à U_{n-1}, vérifiant (H1) *et* (H3) *et admettant des racines complexes non réelles. On pose alors pour tout réel t strictement positif :*

$$P_t(X) = (tX + 1)\, B(X).$$

Pour tout entier m supérieur ou égal à 2 et pour tout polynôme $A(X) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k X^k$ à coefficients réels tous non nuls, on note :

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}, \quad \theta(A, k) = \frac{\alpha_k^2}{\alpha_{k-1}\, \alpha_{k+1}}.$$

IV.5.2. Montrer que :

a. pour tout entier k compris entre 2 et $n-1$ on a :

$$\lim_{t \to +\infty} \theta(P_t, k) = \theta(B, k-1);$$

b. $\lim_{t \to +\infty} \theta(P_t, 1) = +\infty$.

IV.5.3. En déduire qu'on peut trouver un réel t strictement positif tel que $\theta(P_t, k) > \gamma$ pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$ puis conclure.