Concours du C.A.P.E.S
Deuxième Epreuve

(Analyse) Session 2000

NOTATIONS ET OBJECTIF DU PROBLÈME

On note :

$\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels et, pour p et q éléments de $\mathbb{N}$ vérifiant $p \leqslant q$,

$$[\![p,q]\!] = \{m \mid m \in \mathbb{N} \text{ et } p \leqslant m \text{ et } m \leqslant q\}$$

On note également :

$\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels,

$\mathbb{R}[X]$ la $\mathbb{R}$-algèbre des polynômes à coefficients réels.

La lettre n désignant un nombre entier naturel, on note :

$\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n.

Quel que soit le polynôme P appartenant à $\mathbb{R}[X]$ que l'on considère, on identifie dans tout le problème le polynôme P et la fonction $x \mapsto P(x)$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui lui est naturellement associée.

La lettre k désignant un entier naturel et la lettre I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide, on note :

$\mathcal{C}^k(I)$ la $\mathbb{R}$-algèbre des applications f de I vers $\mathbb{R}$ k fois dérivables sur I et de dérivée k^e continue.

En particulier, $\mathcal{C}^0(I)$ est la $\mathbb{R}$-algèbre des applications f de I vers $\mathbb{R}$ continues sur I.

Si f est une application d'un ensemble J contenant I vers $\mathbb{R}$ et que la restriction de f à I appartient à $\mathcal{C}^k(I)$, on peut considérer que f appartient à $\mathcal{C}^k(I)$.

Soit I un intervalle fermé, borné et non vide de $\mathbb{R}$, appelé segment.
Si f est un élément quelconque de $\mathcal{C}^0(I)$, on appelle norme infinie de f le réel

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{Sup}_{t\in I} |f(t)|$$

On rappelle que l'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ de $\mathcal{C}^0(I)$ vers $\mathbb{R}$ est une norme (appelée norme infinie ou norme de la convergence uniforme) et que, muni de cette norme, $\mathcal{C}^0(I)$ est une algèbre de Banach.

On admet le théorème de Weierstrass-Stone :

L'intervalle I de $\mathbb{R}$ étant fermé, borné et non vide, pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}^0(I)$, pour tout réel strictement positif ε, il existe un polynôme P appartenant à $\mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Enfin, si $(E, \|\ \|)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et si u est un endomorphisme continu de E, on note $|||u|||$ la norme "subordonnée" de u, soit

$$|||u||| = \operatorname*{Sup}_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leqslant 1}} \|u(x)\| = \operatorname*{Sup}_{\substack{x\in E\\ x\neq 0_E}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$$

Le principal objectif de ce problème est d'exposer le principe de certaines méthodes d'intégration approchée généralement dénommées "quadratures de Gauss".

Partie I

Étude d'une suite de polynômes orthogonaux : les polynômes de Legendre

I.1. Quel que soit l'entier naturel n, on définit la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

$$L_n : t \longmapsto \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^2-1)^n$$

En particulier, L_0 est l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ constante de valeur 1.

I.1.a. Montrer que, pour tout entier naturel n, L_n est un polynôme de degré n et préciser son coefficient dominant.

I.1.b. Expliciter L_1, L_2 et L_3.

I.1.c. Préciser, pour tout entier naturel n, la parité de L_n.

I.1.d. Soit n un entier naturel. Montrer que $L_n(1) = 2^n\, n!$ et calculer $L_n(-1)$.
On pourra utiliser la formule de Leibniz.

I.2. Le couple (f,g) d'éléments de $\mathcal{C}^0([-1,1])$ étant quelconque, on pose

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle}$$

I.2.a. Montrer que la fonction $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle$ de $\mathcal{C}^0([-1,1]) \times \mathcal{C}^0([-1,1])$ vers $\mathbb{R}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([-1,1])$.

Notons qu'il s'ensuit que l'application $f \mapsto \|f\|_2$ est la norme euclidienne associée à ce produit scalaire et que l'espace $\mathcal{C}^0([-1,1])$ muni de ce produit scalaire est un espace préhilbertien (séparé).
Sauf mention contraire, on considère dans la suite de la partie I que l'espace $\mathcal{C}^0([-1,1])$ est muni de ce produit scalaire.

I.2.b. L'entier naturel n étant non nul, on considère la fonction impaire f_n de $[-1,1]$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout réel t appartenant à $[0,1]$,

$$f_n(t) = \begin{cases} nt & \text{si} \quad t < 1/n, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

I.2.b.1. Vérifier que, pour tout entier naturel non nul n, f_n appartient à $\mathcal{C}^0([-1,1])$.

I.2.b.2. Montrer que, pour tout couple (m,n) d'entiers naturels vérifiant $1 \leqslant n \leqslant m$,

$$\|f_m - f_n\|_2 \leqslant \sqrt{\frac{2}{3n}}$$

I.2.b.3. Si on suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans l'espace $\mathcal{C}^0([-1,1])$ muni de la norme $\|\ \|_2$ vers une limite f, montrer que cette limite est impaire et que sa restriction à $]0,1]$ est constante de valeur 1.
L'espace $\mathcal{C}^0([-1,1])$ muni de la norme $\|\ \|_2$ est-il un espace de Hilbert ?

I.3. Montrer que, pour tous entiers naturels n et m,

$$\langle L_n, L_m\rangle = (-1)^n \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n \left(\frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}t^{m+n}}(t^2-1)^m\right)\mathrm{d}t$$

En déduire que la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale dans l'espace $\mathcal{C}^0([-1,1])$ pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

I.4. L'entier naturel n étant quelconque, on pose

$$K_n = \frac{1}{\|L_n\|_2}\, L_n$$

et l'on note F_n le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([-1,1])$ constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n ; ce sous-espace étant de dimension finie, on note π_n le projecteur orthogonal de $\mathcal{C}^0([-1,1])$ sur F_n.

Étude d'une suite de polynômes orthogonaux : les polynômes de Legendre

I.1. Quel que soit l'entier naturel n, on définit la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

$$L_n : t \longmapsto \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^2-1)^n$$

En particulier, L_0 est l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ constante de valeur 1.

I.1.a. Montrer que, pour tout entier naturel n, L_n est un polynôme de degré n et préciser son coefficient dominant.

I.1.b. Expliciter L_1, L_2 et L_3.

I.1.c. Préciser, pour tout entier naturel n, la parité de L_n.

I.1.d. Soit n un entier naturel. Montrer que $L_n(1) = 2^n\, n!$ et calculer $L_n(-1)$.
On pourra utiliser la formule de Leibniz.

I.2. Le couple (f,g) d'éléments de $\mathcal{C}^0([-1,1])$ étant quelconque, on pose

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f\rangle}$$

I.2.a. Montrer que la fonction $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle$ de $\mathcal{C}^0([-1,1]) \times \mathcal{C}^0([-1,1])$ vers $\mathbb{R}$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([-1,1])$.

Notons qu'il s'ensuit que l'application $f \mapsto \|f\|_2$ est la norme euclidienne associée à ce produit scalaire et que l'espace $\mathcal{C}^0([-1,1])$ muni de ce produit scalaire est un espace préhilbertien (séparé).
Sauf mention contraire, on considère dans la suite de la partie I que l'espace $\mathcal{C}^0([-1,1])$ est muni de ce produit scalaire.

I.2.b. L'entier naturel n étant non nul, on considère la fonction impaire f_n de $[-1,1]$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout réel t appartenant à $[0,1]$,

$$f_n(t) = \begin{cases} nt & \text{si} \quad t < 1/n, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

I.2.b.1. Vérifier que, pour tout entier naturel non nul n, f_n appartient à $\mathcal{C}^0([-1,1])$.

I.2.b.2. Montrer que, pour tout couple (m,n) d'entiers naturels vérifiant $1 \leqslant n \leqslant m$,

$$\|f_m - f_n\|_2 \leqslant \sqrt{\frac{2}{3n}}$$

I.2.b.3. Si on suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans l'espace $\mathcal{C}^0([-1,1])$ muni de la norme $\|\ \|_2$ vers une limite f, montrer que cette limite est impaire et que sa restriction à $]0,1]$ est constante de valeur 1.
L'espace $\mathcal{C}^0([-1,1])$ muni de la norme $\|\ \|_2$ est-il un espace de Hilbert ?

I.3. Montrer que, pour tous entiers naturels n et m,

$$\langle L_n, L_m\rangle = (-1)^n \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n \left(\frac{\mathrm{d}^{m+n}}{\mathrm{d}t^{m+n}}(t^2-1)^m\right)\mathrm{d}t$$

En déduire que la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale dans l'espace $\mathcal{C}^0([-1,1])$ pour le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$.

I.4. L'entier naturel n étant quelconque, on pose

$$K_n = \frac{1}{\|L_n\|_2}\, L_n$$

et l'on note F_n le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([-1,1])$ constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n ; ce sous-espace étant de dimension finie, on note π_n le projecteur orthogonal de $\mathcal{C}^0([-1,1])$ sur F_n.

I.4.a. À l'aide du théorème de Weierstrass-Stone, montrer que, quelle que soit la fonction f appartenant à $\mathcal{C}^0([-1,1])$, la suite $(\pi_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f au sens de la norme $\| \ \|_2$.

I.4.b. Montrer que, pour tout entier naturel n, la famille $(K_j)_{0\leqslant j\leqslant n}$ est une base de F_n.

I.4.c. Montrer que, pour tout entier naturel n et tout élément f de $\mathcal{C}^0([-1,1])$,

$$\pi_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \langle f, K_j\rangle\, K_j \qquad \text{et} \qquad \|\pi_n(f)\|_2^2 = \sum_{j=0}^{n} \langle f, K_j\rangle^2$$

I.4.d. Montrer que, quelle que soit la fonction f appartenant à $\mathcal{C}^0([-1,1])$, la série de terme général $\langle f, K_n\rangle^2$ converge et que l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle f, K_n\rangle^2 = \|f\|_2^2$$

Quelle est la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\, K_n(t)\,\mathrm{d}t$?

Partie II

Une classe de suites orthogonales de polynômes

Soient a un réel ou $-\infty$, b un réel ou $+\infty$, vérifiant $a < b$ dans le cas où a et b sont réels.

On dit *dans ce problème* qu'une fonction continue f de l'intervalle ouvert $]a,b[$ vers $\mathbb{R}$ est intégrable sur $]a,b[$ (respectivement absolument intégrable sur $]a,b[$) si

$$\lim_{\substack{(\alpha,\beta)\to(a,b)\\ (\alpha,\beta)\in]a,b[^2}} \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \left(\text{respectivement } \lim_{\substack{(\alpha,\beta)\to(a,b)\\ (\alpha,\beta)\in]a,b[^2}} \int_\alpha^\beta |f(t)|\,\mathrm{d}t\ \right)$$

existe dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \left(\text{respectivement } \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t\ \right)$$

la valeur de cette limite et on l'appelle intégrale de f (respectivement de $|f|$) sur $]a,b[$.

Attention ! la notion d'intégrabilité ainsi définie est purement réservée à ce problème et ne recouvre pas du tout les notions usuelles d'intégrabilité, en particulier la notion d'intégrabilité au sens de Lebesgue.

On admet que si la fonction f appartenant à $\mathcal{C}^0(]a,b[)$ est absolument intégrable sur $]a,b[$, alors elle est intégrable sur $]a,b[$ et

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Soit ω une fonction continue de l'intervalle ouvert $]a,b[$ vers $\mathbb{R}$, strictement positive.
On note E l'ensemble des fonctions continues f de $]a,b[$ vers $\mathbb{R}$ telles que $f^2\omega$ est intégrable sur $]a,b[$.

II.1.

II.1.a. Montrer que, pour tout élément (f,g) de E^2, la fonction $fg\,\omega$ est intégrable sur $]a,b[$.

Le couple (f,g) étant élément de E^2, on note

$$\langle f, g\rangle_\omega = \int_a^b f(t)\,g(t)\,\omega(t)\,\mathrm{d}t$$

On admet que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour les lois usuelles et que l'application $(f,g)\mapsto\langle f,g\rangle_\omega$ de E^2 vers $\mathbb{R}$ est un produit scalaire sur E, dont on note $f\mapsto\|f\|_\omega$ la norme euclidienne associée.

Dans la suite de la partie II, l'espace E est muni de ce produit scalaire.

On note F le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions polynomiales de $]a,b[$ vers $\mathbb{R}$, que l'on identifie aux polynômes appartenant à $\mathbb{R}[X]$ qui leur sont naturellement associés.

L'entier naturel n étant quelconque, on note (comme dans la partie I) F_n le sous-espace vectoriel de F constitué des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à n.

II.1.b. Dans le cas où a et b sont tous deux réels, montrer que F est inclus dans E si et seulement si la fonction ω est intégrable sur $]a,b[$.
Dans le cas contraire, montrer que F est inclus dans E si et seulement si, pour tout entier naturel n, la fonction $t \mapsto t^n \omega(t)$ est intégrable sur $]a,b[$.

On suppose dans la suite de la partie II que F est inclus dans E.

II.1.c. Montrer qu'il existe dans E une suite orthogonale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F telle que, pour tout entier naturel n, $\deg P_n = n$.

II.2. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthogonale d'éléments de F tel que, pour tout n, $\deg P_n = n$.
L'entier naturel n étant non nul, on note, s'il en existe, $r_1, r_2, \ldots, r_p$ les racines (distinctes) de P_n qui sont d'ordre de multiplicité impair et appartiennent à $]a,b[$, et on note Z_n leur ensemble (éventuellement vide). On considère le polynôme

$$Q_n = \begin{cases} P_0 & \text{si} \quad Z_n = \emptyset, \\ (X-r_1)(X-r_2)\ldots(X-r_p) & \text{si} \quad Z_n \neq \emptyset. \end{cases}$$

Soit n un entier naturel non nul.

II.2.a. Montrer que $\langle P_n, Q_n\rangle_\omega \neq 0$.

II.2.b. Montrer que, si $\deg Q_n < n$, alors $\langle P_n, Q_n\rangle_\omega = 0$.

II.2.c. En déduire que les n racines complexes de P_n sont simples et appartiennent à $]a,b[$.

II.3. *Un nouvel exemple : les polynômes de Laguerre.*
On considère dans cette question le cas particulier où $a = 0$, $b = +\infty$ et $\omega : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$.

II.3.a. Montrer que F est inclus dans E et que, pour tout entier naturel n,

$$\int_0^{+\infty} t^n \,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = n!$$

On note $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite orthonormale d'éléments de F que l'on obtient à partir de la suite $\left(x \mapsto x^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F en appliquant le théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
Les polynômes G_n portent le nom de polynômes de Laguerre.

II.3.b. Calculer G_0, G_1 et G_2. Quels sont les zéros de G_2 ?

Partie III
Interpolation polynomiale

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, q un entier naturel supérieur ou égal à 2, $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ une famille d'éléments deux à deux distincts de I.

III.1. *Interpolation de Lagrange.*
L'entier j appartenant à $[\![1,q]\!]$, on définit la fonction polynomiale à coefficients réels

$$\ell_j : t \longmapsto \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant q \\ i\neq j}} \frac{t-x_i}{x_j-x_i}$$

III.1.a. Montrer que l'application

$$(P_1,P_2) \longmapsto \sum_{i=1}^{q} P_1(x_i)\,P_2(x_i)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{q-1}[X]$ et que, pour ce produit scalaire, la famille $(\ell_j)_{1\leqslant j\leqslant q}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_{q-1}[X]$.

III.1.b. Quelles sont les coordonnées dans la base $(\ell_j)_{1\leqslant j\leqslant q}$ d'un polynôme P de $\mathbb{R}_{q-1}[X]$?

III.1.c. Soit $(y_i)_{1\leqslant i\leqslant q}$ une famille de réels.
Montrer qu'il existe un polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_{q-1}[X]$ et un seul tel que, pour tout entier i appartenant à $[\![1,q]\!]$, $P(x_i)=y_i$.
Quels sont les polynômes Q appartenant à $\mathbb{R}[X]$ tels que, pour tout i appartenant à $[\![1,q]\!]$, $Q(x_i)=y_i$?

Si f est une fonction continue de I vers $\mathbb{R}$, l'unique polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_{q-1}[X]$ tel que, pour tout entier i appartenant à $[\![1,q]\!]$, $P(x_i)=f(x_i)$, est appelé le polynôme interpolateur de Lagrange de f aux points $x_1, x_2, \dots, x_q$.

III.1.d. On suppose dans cette question que I est un segment.
Montrer que l'application Λ de $\mathcal{C}^0(I)$ vers $\mathbb{R}_{q-1}[X]$, qui associe à f son polynôme interpolateur de Lagrange aux points $x_1, x_2, \dots, x_q$, est linéaire et surjective.
Montrer que, pour toute application f appartenant à $\mathcal{C}^0(I)$ et tout réel t appartenant à I,

$$|\Lambda(f)(t)| \leqslant \Big(\operatorname*{Max}_{1\leqslant j\leqslant q} |f(x_j)|\Big)\sum_{j=1}^{q}|\ell_j(t)|$$

On définit l'application χ de I vers $\mathbb{R}$ par la relation

$$\chi(t)=\sum_{j=1}^{q}|\ell_j(t)|$$

On munit les espaces $\mathcal{C}^0(I)$ et $\mathbb{R}_{q-1}[X]$ $\big($identifié à un sous-espace de $\mathcal{C}^0(I)\big)$ de la norme infinie.
Montrer que l'application linéaire Λ est continue et que

$$|||\Lambda||| = \|\chi\|_\infty$$

III.2. *Interpolation de Hermite.*
Dans la suite de la partie III, on considère q entiers naturels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$ et l'on pose

$$m=q+\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_q$$

On considère une fonction f de I vers $\mathbb{R}$ admettant, pour tout i appartenant à $[\![1,q]\!]$, une dérivée d'ordre α_i au point x_i.
Montrer qu'il existe un polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ et un seul tel que, pour tout i appartenant à $[\![1,q]\!]$ et pour tout k appartenant à $[\![0,\alpha_i]\!]$, $P^{(k)}(x_i)=f^{(k)}(x_i)$.

Ce polynôme est appelé le polynôme interpolateur de Hermite de f aux points $x_1, x_2, \dots, x_q$ relativement aux entiers $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$.

On pourra commencer par établir l'injectivité de l'application de $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ vers $\mathbb{R}^m$ définie par

$$P \longmapsto \big(P(x_1),P'(x_1),\dots,P^{(\alpha_1)}(x_1),P(x_2),P'(x_2),\dots,P^{(\alpha_2)}(x_2),\ \dots\ ,P(x_q),P'(x_q),\dots,P^{(\alpha_q)}(x_q)\big)$$

III.3. *Majoration de l'erreur dans l'interpolation de Hermite.*
On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^m$ de I vers $\mathbb{R}$.
Le réel x appartenant à I, on note J_x le plus petit intervalle fermé contenant $x_1, x_2, \dots, x_q$ et x.

On fixe un réel x appartenant à I. On suppose dans (III.3.a,b,c) que x est distinct de $x_1, x_2, \dots, x_q$.
On note H le polynôme interpolateur de Hermite de f aux points $x_1, x_2, \dots, x_q$ relativement aux entiers $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$, et H_x le polynôme interpolateur de Hermite de f aux points $x_1, x_2, \dots, x_q$, x relativement aux entiers $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q, 0$.
On note p la fonction polynomiale de I vers $\mathbb{R}$

$$t \longmapsto \prod_{i=1}^{q}(t-x_i)^{\alpha_i+1}$$