Concours du C.A.P.E.S
Deuxième Epreuve

(Algèbre et géométrie) Session 2000

http://www.archimaths.net/

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien orienté de dimension 3 et $\vec{\mathscr{E}}$ son espace vectoriel associé. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{\mathscr{E}}$ est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et la norme d'un vecteur $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\|$. La distance de deux points A et B de $\mathscr{E}$ est notée AB, soit $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Si $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on repérera un point M par un triplet de ses coordonnées sphériques (r, φ, θ) dans $[0, +\infty[\times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi[$ tel que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{i} = r \cos\varphi \cos\theta \\ \overrightarrow{OM} \cdot \vec{j} = r \cos\varphi \sin\theta \\ \overrightarrow{OM} \cdot \vec{k} = r \sin\varphi, \end{cases}$$

ou en d'autres termes tout triplet $(0, \varphi, \theta)$ est un triplet de coordonnées sphériques de O ;
tout triplet $\left(\lambda, \frac{\pi}{2}, \theta\right)$ est un triplet de coordonnées sphériques de M si $\overrightarrow{OM} = \lambda \vec{k}$ avec $\lambda > 0$;
tout triplet $\left(-\lambda, -\frac{\pi}{2}, \theta\right)$ est un triplet de coordonnées sphériques de M si $\overrightarrow{OM} = \lambda \vec{k}$ avec $\lambda < 0$;

enfin si M n'appartient pas à la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{k}$, alors si on désigne par m la projection orthogonale de M sur le plan passant par O et de vecteurs directeurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, φ est une mesure en radians comprise strictement entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ de l'angle $(\overrightarrow{Om}, \overrightarrow{OM})$ et θ est une mesure en radians appartenant à $[0, 2\pi[$ de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{Om})$.

Étant donnés deux points X et Y de $\mathscr{E}$, on note [XY] le segment d'extrémités X et Y et si X et Y sont distincts, on note $\mathscr{D}_{(X,Y)}$ la droite passant par X et Y.

On rappelle qu'étant donnés quatre points non coplanaires A, B, C et D, on appelle tétraèdre de sommets A, B, C et D l'enveloppe convexe de ces quatre points, c'est-à-dire l'ensemble des barycentres de ces quatre points affectés de masses positives ou nulles. On note T = ABCD ce tétraèdre.

Un point X de T = ABCD est dit extrémal si pour tout couple de points Y et Z de T, on a :

si X est le milieu du segment [YZ], alors Y = Z.

On rappelle que les points extrémaux d'un tétraèdre sont ses sommets.

Les arêtes du tétraèdre T = ABCD sont les segments d'extrémités deux sommets.

Un tétraèdre est régulier si toutes ses arêtes sont de même longueur.

On désigne par vol, l'application de $\mathscr{E}^4$ dans $\mathbb{R}^+$ qui au quadruplet de points (A, B, C, D) associe le nombre :

$$\operatorname{vol}(A, B, C, D) = \frac{1}{6} \left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right| \tag{1}$$

On rappelle que le nombre V = vol(A, B, C, D) est le volume du tétraèdre T = ABCD.

Soit {A, B, C, D} un ensemble de cardinal 4. On note Σ le groupe des permutations de cet ensemble. Une permutation ρ appartenant à Σ pourra être notée $[(A, B, C, D) \mapsto (\rho(A), \rho(B), \rho(C), \rho(D))]$ ou en utilisant la notation usuelle en produit de cycles.

On désigne par τ la transposition de A et de B, on notera $\tau = [(A, B, C, D) \mapsto (B, A, C, D)]$ ou encore $\tau = (AB)$; on désigne par σ le cycle qui à B associe C, à C associe D, à D associe B et qui laisse A fixe, on notera $\sigma = [(A, B, C, D) \mapsto (A, C, D, B)]$ ou encore $\sigma = (BCD)$; on notera id l'application identique de Σ, soit $\mathrm{id} = [(A, B, C, D) \mapsto (A, B, C, D)]$.

La première partie du problème a pour but de caractériser des plans partageant un tétraèdre quelconque en deux parties dont les volumes sont 1/8 et 7/8 du volume de ce tétraèdre. Les trois autres parties sont consacrées au tétraèdre régulier. La deuxième partie étudie la caractérisation d'un tétraèdre régulier par les projections orthogonales de ses sommets sur une droite. La troisième partie étudie quelques aspects du groupe des isométries d'un tétraèdre régulier et de fonctions définies sur une sphère invariantes par ce groupe. Enfin la dernière partie est une application de la géométrie du tétraèdre à la description d'une expérience aléatoire.

Les diverses parties du problème sont dans une large mesure indépendantes et peuvent être traitées indépendamment les unes des autres, dans l'ordre que le candidat souhaitera.

I. À PROPOS DU TÉTRAÈDRE QUELCONQUE

On suppose donnés A, B, C et D, quatre points non coplanaires de $\mathscr{E}$.

1.

a. Montrer que les points A, B, C et D sont deux à deux distincts. Quel est l'ordre du groupe Σ ?

b. Expliciter les permutations suivantes à l'aide de cycles :

$$\tau^2, \sigma^3, \tau\sigma, (\tau\sigma)^4, \sigma\tau\sigma^2, \sigma^2\tau\sigma, \tau\sigma\tau\sigma^2\tau, \tau\sigma^2\tau\sigma\tau \text{ et } \tau\sigma\tau\sigma^2\tau\sigma.$$

c. Montrer que σ et τ engendrent Σ.

d. Déduire de *c.* que pour toute permutation ρ appartenant à Σ :

$$\mathrm{vol}(\rho(A), \rho(B), \rho(C), \rho(D)) = \mathrm{vol}(A, B, C, D).$$

e. Peut-on déduire le résultat précédent de ce que $\mathrm{vol}(A, B, C, D)$ est le volume du tétraèdre $ABCD$?

2. Soit H_A le projeté orthogonal de A sur le plan passant par B, C et D. Montrer à partir de (1) que le volume du tétraèdre T peut aussi s'écrire :

$$V = \mathrm{vol}(A, B, C, D) = \frac{1}{3} AH_A \text{ aire}(BCD)$$

où $\text{aire}(BCD)$ désigne l'aire du triangle BCD.

3. Soit λ un réel strictement compris entre 0 et 1 et soit L le barycentre de A et H_A affectés des masses λ et $1-\lambda$. Montrer que le plan P passant par L et perpendiculaire à $\mathscr{D}_{(A, H_A)}$ coupe les arêtes $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$. On désigne les points d'intersections correspondants par S_B, S_C et S_D. L'intersection du tétraèdre T et du demi-espace limité par P et contenant A est le tétraèdre $AS_BS_CS_D$. Soit v_1 le volume de cette intersection et soit v_2 le volume de l'intersection du tétraèdre T avec le demi-espace limité par P et contenant B.

a. Déterminer la valeur λ_1 de λ telle que $v_1 = \dfrac{V}{8}$.

b. Déterminer la valeur λ_2 de λ telle que $v_2 = \dfrac{V}{8}$.

4.

a. Montrer qu'il existe un couple unique de points (I, J) tel que I appartienne à $\mathscr{D}_{(A, B)}$, que J appartienne à $\mathscr{D}_{(C, D)}$, que $\mathscr{D}_{(I, J)}$ soit perpendiculaire à $\mathscr{D}_{(A, B)}$ et que $\mathscr{D}_{(I, J)}$ soit perpendiculaire à $\mathscr{D}_{(C, D)}$.

b. Soit μ un nombre réel strictement compris entre 0 et 1 et soit M le barycentre de I et de J affectés des masses μ et $1-\mu$. Montrer que le plan Q passant par M et perpendiculaire à $\mathscr{D}_{(I, J)}$ coupe les arêtes $[AC]$, $[AD]$, $[BC]$ et $[BD]$; on note ces intersections respectivement U_{AC}, U_{AD}, U_{BC} et U_{BD}. Montrer que $U_{AC}U_{AD}U_{BD}U_{BC}$ est un parallélogramme.

c. Dans cette question $\mu = \dfrac{1}{3}$. Dessiner sans commentaire les deux figures planes obtenues par projections orthogonales des arêtes du tétraèdre T et des côtés du parallélogramme $U_{AC}U_{AD}U_{BD}U_{BC}$ d'une part sur le plan Q, d'autre part sur le plan passant par A, B et J (on supposera que $\mathscr{D}_{(C, D)}$ et $\mathscr{D}_{(A, B)}$ ne sont pas orthogonales).

d. On suppose de nouveau μ quelconque dans $]0, 1[$. Exprimer l'aire du parallélogramme $U_{AC}U_{AD}U_{BD}U_{BC}$ en fonction de μ et de l'aire W d'un parallélogramme $U_1U_2U_3U_4$ tel que $\overrightarrow{U_1U_2} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{U_2U_3} = \overrightarrow{CD}$.

e. Exprimer le volume V du tétraèdre $T = ABCD$ en fonction de W et de la distance IJ.

f. On désigne par v_3 le volume de l'intersection de T avec le demi-espace limité par Q et contenant les points C et D. Déterminer la fonction polynomiale f de degré 3, qui s'annule en 0 et qui est telle que les équations en μ dans $]0, 1[$:

$$f(\mu) + \frac{1}{8} = 0 \qquad (2)$$

et $v_3 = \dfrac{V}{8}$ soient équivalentes. Montrer que (2) admet une solution unique μ_0 dans l'intervalle $]0, 1[$.

g. Vérifier que $f(1-\mu_0)+\dfrac{7}{8}=0$. Pourquoi pouvait-on prévoir ce résultat ?

h. On définit les fonctions réelles de variable réelle g et h par $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{8}$ et $h(x)=\dfrac{32x^3-24x^2-1}{48x(x-1)}$, et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0=\dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1}=h(u_n)$ pour tout entier naturel n. Montrer que g et g' sont décroissantes sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers μ_0. Calculer u_1 et u_2. Montrer que $0{,}22<\mu_0$. Donner une valeur approchée de μ_0 à $2\cdot 10^{-3}$ près.

i. Montrer que h'' est décroissante sur $\left]0,\dfrac{1}{2}\right]$, calculer à la calculatrice une valeur approchée de $h''(0{,}2)$ et vérifier que $h''(0{,}2)<5$. Montrer que pour n entier naturel, on a :

$$(u_{n+1}-\mu_0)<5(u_n-\mu_0)^2.$$

Montrer que u_4 est une approximation de μ_0 à 10^{-7} près et que u_5 est une approximation de μ_0 à 10^{-13} près.

II. IMAGES PAR PROJECTIONS ORTHOGONALES D'UN TÉTRAÈDRE RÉGULIER

Dans la suite du problème on ne considère que des tétraèdres réguliers.

II. A. Projection orthogonale d'un tétraèdre régulier sur une droite.

1. On suppose $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Soit A, B, C et D les points qui ont pour coordonnées respectives dans ce repère $(0,0,3)$, $(2\sqrt{2},0,-1)$, $(-\sqrt{2},-\sqrt{6},-1)$ et $(-\sqrt{2},\sqrt{6},-1)$.

   a. Montrer que le tétraèdre $T=ABCD$ est régulier. Quel est son volume V ?

   b. Soit M un point de la sphère de centre O et de rayon 1, de coordonnées sphériques $(1,\varphi,\theta)$. On projette orthogonalement sur la droite $\mathcal{D}_{(O,M)}$ les sommets A, B, C et D du tétraèdre T respectivement en A', B', C' et D'. On choisit sur la droite $\mathcal{D}_{(O,M)}$ le repère d'origine O et de vecteur directeur $\overrightarrow{OM}$. On note t_A, t_B, t_C et t_D les abscisses des points A', B', C' et D' dans ce repère $(O,\overrightarrow{OM})$.
   Vérifier que :

$$\begin{cases} t_A=3\sin\varphi \\ t_B=-\sin\varphi+2\sqrt{2}\cos\varphi\cos\theta \\ t_C=-\sin\varphi-\sqrt{2}\cos\varphi\cos\theta-\sqrt{6}\cos\varphi\sin\theta \\ t_D=-\sin\varphi-\sqrt{2}\cos\varphi\cos\theta+\sqrt{6}\cos\varphi\sin\theta. \end{cases}$$

   Un calcul élémentaire mais un peu long qu'on ne demande pas d'effectuer montre que $3(A'B'^2+A'C'^2+A'D'^2)-2(\overline{A'B'}\cdot\overline{A'C'}+\overline{A'B'}\cdot\overline{A'D'}+\overline{A'C'}\cdot\overline{A'D'})$ est un nombre indépendant de φ et de θ.

   c. La forme quadratique q_0 définie par :

$$q_0(\beta,\gamma,\delta)=3(\beta^2+\gamma^2+\delta^2)-2(\gamma\delta+\delta\beta+\beta\gamma)$$

   est-elle définie positive ?

2. Soit $T=ABCD$ un tétraèdre régulier quelconque d'arête de longueur ℓ. Soit Δ' une droite quelconque et A', B', C' et D' les projetés orthogonaux de A, B, C et D sur Δ'. On va montrer qu'il existe une forme quadratique unique q telle que :

$$\ell^2=q(\overline{A'B'},\overline{A'C'},\overline{A'D'}).$$

   a. Déduire de la question précédente qu'il existe une telle forme quadratique q. (On pourra choisir une unité de longueur telle que ℓ soit égal à $2\sqrt{6}$ fois cette unité et un repère judicieux et utiliser le résultat de la question précédente pour montrer tout d'abord le résultat dans le cas où Δ' passe par le centre du tétraèdre).

b. On suppose que q est une forme quadratique telle que $\ell^2 = q(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{A'D'})$.

i. Pourquoi la formule $\ell^2 = q(\overline{A'B'}, \overline{A'C'}, \overline{A'D'})$ a-t-elle un sens indépendamment du choix d'une orientation de Δ' ?

ii. Déduire du fait que T est régulier qu'il existe un nombre réel k tel que pour tous α, β et γ réels, on ait :

$$q(\alpha, \beta, \gamma) = k[3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)].$$

iii. Déterminer k. On pourra considérer le cas où Δ' est la droite passant par A et B.

c. Montrer que :

$$2\,\ell^2 = A'B'^2 + A'C'^2 + A'D'^2 + B'C'^2 + B'D'^2 + C'D'^2.$$

II. B. Projection orthogonale d'un tétraèdre régulier sur un plan.

Soit T = ABCD un tétraèdre régulier quelconque d'arête de longueur ℓ. Soit Π_1 un plan quelconque et A_1, B_1, C_1 et D_1 les projetés orthogonaux de A, B, C et D sur Π_1. Soit Δ' une droite orthogonale à Π_1 et A', B', C' et D' les projetés orthogonaux de A, B, C et D sur Δ'.

1. Montrer que :

$$4\,\ell^2 = A_1B_1^2 + A_1C_1^2 + A_1D_1^2 + B_1C_1^2 + B_1D_1^2 + C_1D_1^2$$

(on pourra considérer la droite Δ' orthogonale à Π_1 ou introduire deux droites Δ_1' et Δ_2' orthogonales incluses dans Π_1).

2. Dans cette question on ne demande que des dessins sans aucune justification. On choisit le centimètre comme unité de longueur. On suppose que les points A', B', C' et D' de la droite Δ' sont tous distincts et vérifient :

$$A'B' = B'C' = C'D' = 4.$$

a. Dessiner la disposition des points A', B', C' et D' sur la droite Δ'. Dessiner en vraie grandeur la figure obtenue par projection orthogonale des arêtes de T dans le plan Π_1.

b. Soit M' un point de Δ'. Dessiner sur la figure dans le plan Π_1 de la question précédente la projection orthogonale de la section du tétraèdre avec le plan orthogonal à Δ' passant par M', pour les cinq positions suivantes de M' : M_1' milieu de [A'B'], $M_2' = B'$, M_3' milieu de [B'C'], $M_4' = C'$ et M_5' milieu de [C'D'].

3. Soit A', B', C' et D' quatre points d'une droite Δ'. On suppose qu'au moins deux d'entre eux sont distincts. On cherche les tétraèdres réguliers T = ABCD tels que A se projette orthogonalement sur Δ' en A', B en B', C en C' et D en D'. On définit le nombre positif ℓ par :

$$2\,\ell^2 = A'B'^2 + A'C'^2 + A'D'^2 + B'C'^2 + B'D'^2 + C'D'^2.$$

a. Déduire de la relation précédente que :

(i) $\ell^2 \geq A'B'^2$

et que :

(ii) $$\frac{1}{\ell^2}\left(\frac{\overline{A'C'} + \overline{B'C'}}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{4}\left(1 - \frac{A'B'^2}{\ell^2}\right).$$

b. Montrer que s'il existe un tétraèdre régulier T = ABCD tel que A se projette orthogonalement sur Δ' en A', B en B', C en C' et D en D', il est unique à une isométrie près appartenant à un groupe que l'on précisera.

c. Montrer que l'on peut faire les choix successifs suivants :

(i) choisir un point A du plan orthogonal à Δ', passant par A';

(ii) choisir un point B du plan orthogonal à Δ', passant par B', tel que $AB = \ell$;

(iii) choisir un point C du plan orthogonal à Δ', passant par C', tel que $CA = CB = \ell$;

(iv) choisir un point D du plan orthogonal à Δ', passant par D', tel que $DA = DB = DC = \ell$.

Conclure.

III. SYMÉTRIES DU TÉTRAÈDRE RÉGULIER

On utilise les notations de la partie II.A.1. et celles de l'introduction : on rappelle que le repère est supposé orthonormé et que dans la question II.A.1.*a*. on a montré que le tétraèdre $T = ABCD$ est régulier.

1. Soit ρ appartenant à Σ. Montrer qu'il existe une isométrie de $\mathscr{E}$ unique, notée t, telle que $t(A) = \rho(A)$, $t(B) = \rho(B)$, $t(C) = \rho(C)$ et $t(D) = \rho(D)$. On désigne par ψ l'application qui à ρ associe t. L'application ψ est-elle un homomorphisme de groupes ? L'application ψ est-elle injective, surjective, bijective ?

2. Montrer que $\Sigma' = \psi(\Sigma)$ est l'ensemble des isométries de $\mathscr{E}$ qui conservent globalement le tétraèdre T.

3. Pour toute permutation ρ de Σ, on note L_ρ la matrice, relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\vec{\mathscr{E}}$, de l'isométrie vectorielle $\overrightarrow{\psi(\rho)}$ associée à $\psi(\rho)$.

   a. Vérifier que :

$$L_\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

   Montrer que $\psi(\tau)$ est une réflexion ; préciser par rapport à quel plan. Quels sont les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice L_τ ?

   b. Déterminer L_σ. Montrer que $\psi(\sigma)$ est une rotation ; préciser pour cette rotation : son axe, ses axes orientés, ses angles orientés et leurs mesures. Quels sont les valeurs propres réelles ou complexes et les vecteurs propres réels ou complexes de la matrice L_σ ?

   c. On désigne par ρ_3 la permutation de $\{A, B, C, D\}$ telle que $\rho_3(A) = B$, $\rho_3(B) = C$, $\rho_3(C) = D$ et $\rho_3(D) = A$, soit $\rho_3 = (ABCD)$. Montrer que l'image du milieu M_{AC} du segment $[AC]$ par $\psi(\rho_3)$ est le milieu M_{BD} du segment $[BD]$, point symétrique de M_{AC} par rapport à O. Montrer que la restriction de $\psi(\rho_3)$ au plan médiateur du segment $[M_{AC}M_{BD}]$ est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

   En déduire les valeurs propres de L_{ρ_3} et le polynôme caractéristique de L_{ρ_3}. Montrer que $L_{\rho_3} = L_\tau L_\sigma$; écrire explicitement la matrice L_{ρ_3} puis retrouver son polynôme caractéristique.

   d. On désigne par ρ_4 la permutation de $\{A, B, C, D\}$ telle que $\rho_4(A) = C$, $\rho_4(B) = D$, $\rho_4(C) = A$ et $\rho_4(D) = B$, soit $\rho_4 = (AC)(BD)$. Décrire la transformation géométrique $\psi(\rho_4)$. Quel est le polynôme caractéristique de la matrice L_{ρ_4} ? Il n'est pas demandé d'écrire explicitement la matrice L_{ρ_4}.

4. On trace sur la sphère Ω circonscrite au tétraèdre $ABCD$ tous les grands cercles passant par deux sommets du tétraèdre (un grand cercle est un cercle inclus dans la sphère et centré au centre de la sphère ou encore l'intersection de la sphère avec un plan passant par le centre de la sphère). On appellera points simples les points communs à deux tels grands cercles et points triples les points communs à trois tels grands cercles. Dénombrer le nombre de points simples et le nombre de points triples. Quels sont les coordonnées sphériques des points simples ?

5. On repère tout point M de Ω par ses coordonnées sphériques $(3, \varphi, \theta)$.

   a. Montrer que M appartient au grand cercle passant par C et D si et seulement si : $\sqrt{2}\tan\varphi - \cos\theta = 0$.

   b. Écrire pour chacun des grands cercles Γ de Ω passant par deux sommets de T une relation (R_Γ) entre φ et θ telle que pour tout point M de coordonnées sphériques $(3, \varphi, \theta)$, M appartient à Γ si et seulement si (R_Γ) est vérifiée.

c. Dessiner dans le rectangle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi[$ du plan (φ, θ) la courbe d'équation : $\varphi = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\theta)\right)$. Cette courbe est appelée l'image dans le plan (φ, θ) du grand cercle de Ω passant par C et D. Dessiner sur le même schéma pour chaque grand cercle Γ de Ω passant par deux sommets de T, son image dans le plan (φ, θ), c'est-à-dire la courbe du plan (φ, θ) d'équation (R_Γ). Indiquer sur votre schéma les points (φ, θ) tels que $(3, \varphi, \theta)$ soient les coordonnées sphériques des points simples de la question précédente.

d. On désigne par F l'application de Ω dans $\mathbb{R}$ qui à chaque point M de Ω associe la distance ON où N est l'intersection du segment [OM] avec la frontière de T. Les lignes de niveau de F sont des cercles ou des réunions d'arcs de cercles. Donner l'allure dans le plan (φ, θ) des images des courbes de niveaux $F(M) = 1{,}5$, $F(M) = 2{,}5$ et $F(M) = \sqrt{3}$.

IV. QUESTION COMPLÉMENTAIRE

Soit a une longueur. Nous appellerons tétraèdres rectangles d'hypoténuse a les tétraèdres dont une face est un triangle équilatéral de côtés de longueur a et dont les autres faces sont des triangles isocèles rectangles. Le sommet opposé à la face équilatérale d'un tétraèdre rectangle sera appelé son sommet principal.

1. Soit T = ABCD un tétraèdre régulier dont les arêtes ont pour longueur $2a$, montrer que les milieux M_{AB}, M_{AC}, M_{AD}, M_{BC}, M_{BD} et M_{CD} des arêtes AB, AC, AD, BC, BD et CD sont les sommets d'un octaèdre régulier d'arêtes de longueur a (on admettra qu'un octaèdre est régulier si et seulement si toutes ses arêtes sont de même longueur). Soit O le centre de T, montrer que les tétraèdres $OM_{AB}M_{AC}M_{AD}$, $OM_{AB}M_{BC}M_{BD}$, $OM_{AC}M_{BC}M_{CD}$, $OM_{AD}M_{BD}M_{CD}$, $OM_{AB}M_{AC}M_{BC}$, $OM_{AB}M_{AD}M_{BD}$, $OM_{AC}M_{AD}M_{CD}$ et $OM_{BC}M_{BD}M_{CD}$ sont des tétraèdres rectangles d'hypoténuse a.

2. On dispose de 8 tétraèdres rectangles de même hypoténuse a et de 4 tétraèdres réguliers d'arêtes de cette même longueur a. Ces 12 tétraèdres ont initialement toutes leurs faces bleues. On les assemble face contre face de façon à former un tétraèdre régulier d'arête de longueur $2a$ (on admet que pour cela, il est nécessaire et suffisant de placer côte à côte les tétraèdres rectangles, leurs sommets principaux étant confondus, obtenant ainsi un octaèdre régulier, et de placer ensuite les tétraèdres réguliers d'arêtes de longueur a en vis-à-vis de faces non adjacentes de cet octaèdre. Remarquez que quand on sait pour une face de l'octaèdre si à la fin des manipulations elle est visible ou non, on le sait pour chacune des autres). On peint alors les faces externes visibles en rouge, puis on démonte ce tétraèdre en ses 12 constituants que l'on mélange. On les assemble ensuite de nouveau au hasard sans tenir compte des couleurs pour former un nouveau tétraèdre d'arête de longueur $2a$. On cherche la probabilité p pour que ce nouveau tétraèdre ait lui aussi toutes ses faces entièrement rouges.

   a. Donner un modèle probabiliste de l'expérience aléatoire décrite ci-dessus.
   Justifier en détail votre choix de l'univers Θ et de la probabilité P.

   b. Soit A l'événement dont on cherche la probabilité. Décrire explicitement A comme sous-ensemble de Θ.

   c. Calculer p.