

Correction de l'épreuve d'analyse
Capes 2003

Calixte Denizet
calixteman@yahoo.fr

24 avril 2003

I Opérateurs linéaires positifs. Propriétés et exemples

I.1. Montrons tout d'abord que u est croissante pour la relation d'ordre partiel. En effet, on a

$$f \geq g \implies f - g \geq 0 \implies u(f - g) \geq 0 \implies u(f) - u(g) \geq 0 \implies u(f) \geq u(g)$$

Montrons le résultat annoncé :

$$\begin{aligned} |u(f)| &= \varepsilon u(f) \text{ avec } \varepsilon = \text{signe}(u(f)) \\ &= u(\varepsilon f) \text{ or } \varepsilon f \leq |f| \\ |u(f)| &\leq u(|f|) \text{ car } u \text{ est croissante} \end{aligned}$$

I.2. Il est clair que si u est l'endomorphisme nul, alors $u(e_0) = 0$. Réciproquement, supposons que $u(e_0) = 0$ et soit $f \in \mathcal{H}$. Puisque f est continue sur un compact, $\|f\|_\infty$ existe et est atteinte, donc $|f| \leq \|f\|_\infty e_0$. Ainsi

$$|u(f)| \leq u(|f|) \leq \|f\|_\infty u(e_0) = 0$$

Ainsi $u(f)$ est nul. On en conclut que u est l'endomorphisme nul.

I.3. On a vu précédemment que

$$\forall f \in \mathcal{H} \quad |u(f)| \leq \|f\|_\infty u(e_0) \text{ (avec } u(e_0) > 0 \text{ car } e_0 > 0)$$

Donc

$$|u(f) - u(g)| = |u(f - g)| \leq \|f - g\|_\infty u(e_0)$$

Ainsi u est lipschitzienne donc continue.

I.4. De la relation rappelée dans la question précédente, on déduit que

$$\forall f \in \mathcal{H} \setminus \{0\} \quad \frac{\|u(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} \leq u(e_0) \text{ donc } \|u\|_\infty \leq u(e_0)$$

Or

$$\frac{\|u(e_0)\|_\infty}{\|e_0\|_\infty} = u(e_0)$$

On en déduit que

$$\|u\|_\infty = u(e_0)$$

I.5. Il est clair que u_n est un opérateur linéaire. Supposons qu'il soit positif.

Les $(x_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ étant en nombre fini et distincts, ils sont isolés c'est à dire qu'il existe des intervalles $I_{n,k} \subset I$ tels que $x_{n,k} \in I_{n,k}$ et que si $k' \neq k$, alors $x_{n,k'} \notin I_{n,k}$. Soit maintenant une famille de fonctions positives et continues $(f_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$ telles que $f_{n,k}(x_{n,k}) = 1$ et $f_{n,k}(I \setminus I_{n,k}) = 0$. On a alors $u_n(f_{n,k}) = u_{n,k}$. Or $f_{n,k} \geq 0$ donc $u_n(f_{n,k}) \geq 0$ et ainsi $u_{n,k} \geq 0$. Nous avons donc démontré que u positif implique que les $u_{n,k}$ sont positifs. La réciproque est triviale compte tenu qu'une somme de termes positifs est positive.

I.6.1. On a

$$\begin{aligned}
B_n(f_y)(x) &= \sum_{k=0}^n e^{\frac{ky}{n}} B_{n,k}(x) \\
&= \sum_{k=0}^n e^{\frac{ky}{n}} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^n C_n^k \left(xe^{\frac{y}{n}}\right)^k (1-x)^{n-k} \\
&= \left(xe^{\frac{y}{n}} + 1 - x\right)^n \text{ d'après la formule du binôme de Newton} \\
B_n(f_y)(x) &= \varphi_n(x, y)
\end{aligned}$$

I.6.2. On a

$$B_n(e_j)(x) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^j B_{n,k}(x)$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^j \varphi_n}{\partial y^j} &= \frac{\partial^j}{\partial y^j} \left(\sum_{k=0}^n e^{\frac{ky}{n}} B_{n,k}(x) \right) \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{d^j \left(e^{\frac{ky}{n}}\right)}{dy^j} B_{n,k}(x) \\
&= \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^j e^{\frac{ky}{n}} B_{n,k}(x)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{\partial^j \varphi_n}{\partial y^j}(x, 0) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^j B_{n,k}(x) = B_n(e_j)(x)$$

I.6.3. On a, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
B_n(e_0)(x) &= \varphi_n(x, 0) = 1 \implies B_n(e_0) = e_0 \\
B_n(e_1)(x) &= n \frac{x}{n} \left(xe^{\frac{0}{n}} + 1 - x\right)^{n-1} = x \implies B_n(e_1) = e_1 \\
B_n(e_2)(x) &= \frac{n-1}{n} x^2 \left(xe^{\frac{0}{n}} + 1 - x\right)^{n-2} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 \implies B_n(e_2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) e_2
\end{aligned}$$

I.7.1. Effectuons le changement de variable $v = x - t$ d'où $dv = -dt$. Ainsi

$$u(f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K(t) dt = \int_{x+\pi}^{x-\pi} -f(v)K(x-v) dv = \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)K(x-t) dt$$

Or la fonction $t \mapsto f(t)K(x-t)$ étant continue et 2π -périodique, on a

$$\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)K(x-t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)K(x-t) dt$$

En effet, soit $g \in \mathcal{F}$, posons pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\gamma(\alpha) = \int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} g(t) dt$$

Puisque g est continue, γ est alors dérivable, et on a

$$\gamma'(\alpha) = g(\alpha + \pi) - g(\alpha - \pi)$$

Les quantités $\alpha + \pi$ et $\alpha - \pi$ différant de 2π , on déduit de la 2π -périodicité de g que

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \gamma'(\alpha) = 0$$

Et finalement, on a

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \gamma(\alpha) = \gamma(0) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt$$

I.7.2. La fonction K étant un polynôme trigonométrique, on a

$$K(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

On en déduit, en utilisant des formules classiques de trigonométrie, que

$$\begin{aligned} K(x-t) &= a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k(x-t)) + b_k \sin(k(x-t))) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^n [a_k (\cos(kx) \cos(kt) + \sin(kx) \sin(kt)) \\ &\quad + b_k (\sin(kx) \cos(kt) - \sin(kt) \cos(kx))] \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^n [(a_k \cos(kt) - b_k \sin(kt)) \cos(kx) \\ &\quad + (a_k \sin(kt) + b_k \cos(kt)) \sin(kx)] \\ K(x-t) &= a_0 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k(t) \cos(kx) + \beta_k(t) \sin(kx)) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} u(f) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K(x-t) dt \\ &= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \left[\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \alpha_k(t) dt \right) \cos(kx) + \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \beta_k(t) dt \right) \sin(kx) \right] \end{aligned}$$

On en déduit que $u(f)$ est un polynôme trigonométrique.

I.7.3. Si K est positive, alors u est clairement positive. Montrons la réciproque.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ pour lequel $K(t_0) < 0$ puis en montrant que $u(f)(0) < 0$ (avec $f \geq 0$ judicieusement choisie) ce qui contredira la positivité de u .

Montrons d'abord qu'il existe $t_1 \in]-\pi, \pi[$ tel que $K(t_1) < 0$. Si $t_0 \notin \mathbb{Z}\pi$, alors par 2π -périodicité de K , on peut trouver $t_1 \in]-\pi, \pi[$ tel que $K(t_1) < 0$. Si $t_0 \in \mathbb{Z}\pi$, alors par continuité de K , il existe un intervalle I centré en t_0 tel que $K|_I < 0$. L'ensemble $\mathbb{Z}\pi$ étant constitué de points isolés, on en déduit l'existence de $t'_0 \in I \setminus \mathbb{Z}\pi$ tel que $K(t'_0) < 0$ donc l'existence de $t_1 \in]-\pi, \pi[$ tel que $K(t_1) < 0$.

Par continuité de K en t_1 , il existe alors un intervalle $I_0 \subset]-\pi, \pi[$ centré en t_1 dans lequel K est négative.

Considérons une fonction f_0 positive, continue et 2π -périodique telle qu'elle soit nulle sur $[-\pi, \pi] \setminus I_0$ et strictement positive sur I_0 . Puis posons pour tout $t \in \mathbb{R}$ $f(t) = f_0(-t)$ (donc $f(-t) = f_0(t)$). On a alors

$$u(f)(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(-t)K(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f_0(t)K(t) dt = \int_{I_0} f_0(t)K(t) dt < 0 \text{ car } K|_{I_0} < 0$$

Donc $u(f)(0) < 0$ ce qui contredit la positivité de u .

I.8.1. La fonction θ_p présente des discontinuités en les multiples entiers relatifs de π . Observons le comportement de θ_p au voisinage de ses discontinuités. Soit $k \in \mathbb{Z}$, on a alors

$$\theta_p(x) = \frac{\sin(px)}{\sin x} = \frac{\sin(px - pk\pi + pk\pi)}{\sin(x - k\pi + k\pi)} = \frac{(-1)^{pk} \sin(p(x - k\pi))}{(-1)^k \sin(x - k\pi)}$$

Or au voisinage de 0, on a $\sin x \sim x$, donc au voisinage de $k\pi$

$$\theta_p(x) \sim (-1)^{(p-1)k} \frac{p(x - k\pi)}{x - k\pi} \sim (-1)^{(p-1)k} p$$

Ainsi θ_p est prolongeable par continuité en chaque point de $\mathbb{Z}\pi$ en une fonction nommée $\tilde{\theta}_p$. De plus, θ_p étant clairement 2π -périodique sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$, il faut vérifier que $\tilde{\theta}_p$ est encore 2π -périodique

$$\tilde{\theta}_p(k\pi + 2\pi) = \tilde{\theta}_p((k+2)\pi) = (-1)^{(p-1)(k+2)} p = (-1)^{(p-1)k} (-1)^{2(p-1)} p = \tilde{\theta}_p(k\pi)$$

Par conséquent, θ_p se prolonge en une fonction continue et 2π -périodique sur \mathbb{R} .

I.8.2. En utilisant la linéarité de la partie réelle (notée \Re) et l'égalité $\cos x = \Re(e^{ix})$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos(kx) &= \sum_{k=1}^n \Re(e^{ikx}) \\ &= \Re\left(\sum_{k=1}^n e^{ikx}\right) \\ \sum_{k=1}^n e^{ikx} &= e^{ix} \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1} \\ &= e^{ix} \frac{e^{i\frac{nx}{2}} e^{i\frac{nx}{2}} - e^{-i\frac{nx}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}} e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} \\ &= e^{i\frac{n+1}{2}x} \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

On en déduit que

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx)\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right)$$

Or en utilisant les formules de trigonométrie, on obtient

$$\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

Donc

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx)\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)$$

I.8.3. On remarque tout d'abord que

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{1}{2} \theta_{2n+1}\left(\frac{x}{2}\right)$$

car l'égalité est claire sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi$ et puisque le membre de droite est partout continue et 2π -périodique, l'égalité se prolonge à \mathbb{R} tout entier.

Montrons l'égalité demandée

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left[\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt \right) \cos(kx) \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt \right) \sin(kx) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos(kt) \cos(kx) + \sin(kt) \sin(kx)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(k(x-t)) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(x-t)) \right) dt \\ S_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \theta_{2n+1}\left(\frac{x-t}{2}\right) dt \end{aligned}$$

I.8.4. En utilisant la linéarité de la fonction partie imaginaire (notée $\Im m$) et l'égalité

$\sin x = \Im(e^{ix})$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(kx + \frac{x}{2}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \Im\left(e^{ikx + i\frac{x}{2}}\right) \\
&= \Im\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx + i\frac{x}{2}}\right) \\
\sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx + i\frac{x}{2}} &= e^{i\frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx} \\
&= e^{i\frac{x}{2}} \frac{e^{inx} - 1}{e^{ix} - 1} \\
&= e^{i\frac{x}{2}} \frac{e^{i\frac{nx}{2}} e^{i\frac{nx}{2}} - e^{-i\frac{nx}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}} e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}} \\
&= e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}
\end{aligned}$$

On en conclut que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(kx + \frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Puis que

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left((2k+1)\frac{x}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)$$

I.8.5. On a

$$\begin{aligned}
T_n(f) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_n(f) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \theta_{2n+1}\left(\frac{x-t}{2}\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left((2n+1)\frac{x-t}{2}\right)\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)} \left(\frac{\sin^2\left(\frac{n(x-t)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)}\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{\sin^2\left(\frac{n(x-t)}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x-t}{2}\right)}\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \theta_{2n+1}^2\left(\frac{x-t}{2}\right) dt
\end{aligned}$$

Posons

$$K_n(t) = \frac{1}{2\pi n} \theta_{2n+1}^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{2}{\pi n} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt)\right)^2$$

Remarquons d'abord que K_n est positive. Montrons ensuite que K_n est un polynôme trigonométrique

$$\begin{aligned}
K_n(t) &= \frac{2}{\pi n} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) \right)^2 \\
&= \frac{2}{\pi n} \left(\frac{1}{4} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) + \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} \cos(kt) \cos(\ell t) \right) \\
&= \frac{2}{\pi n} \left(\frac{1}{4} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} (\cos((k+\ell)t) + \cos((k-\ell)t)) \right)
\end{aligned}$$

On en déduit que K_n est un polynôme trigonométrique positif.

I.8.6. De la question I.7.3. et de la positivité de K_n , on déduit la positivité de l'opérateur linéaire T_n .

I.8.7. On a pour tout $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt} e^{ikt} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j+k)t} dt$$

En notant $\delta_{j,k}$ le symbole de Kroenecker, on a

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ijt} e^{ikt} dt = 2\delta_{j,-k}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(jt) e^{ikt} dt &= \frac{1}{2} (2\delta_{j,-k} + 2\delta_{-j,-k}) \\
\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(jt) \cos(kt) dt &= \Re(\delta_{j,-k} + \delta_{-j,-k}) \\
&= \delta_{j,k} (1 + \delta_{j,0}) \\
\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(jt) \sin(kt) dt &= \Im(\delta_{j,-k} + \delta_{-j,-k}) \\
&= 0 \\
\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(jt) e^{ikt} dt &= \frac{1}{2i} (2\delta_{j,-k} - 2\delta_{-j,-k}) \\
\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(jt) \cos(kt) dt &= \Re \left(\frac{\delta_{j,-k} - \delta_{-j,-k}}{i} \right) \\
&= 0 \\
\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(jt) \sin(kt) dt &= \Im \left(\frac{\delta_{j,-k} - \delta_{-j,-k}}{i} \right) \\
&= -\delta_{j,-k} + \delta_{-j,-k} \\
&= \delta_{j,k}
\end{aligned}$$

On en conclut que

$$\begin{aligned}
S_n(c_j) &= c_j \text{ si } n \geq j \text{ et } S_n(c_j) = 0 \text{ sinon.} \\
S_n(s_j) &= s_j \text{ si } n \geq j \text{ et } S_n(s_j) = 0 \text{ sinon.}
\end{aligned}$$

On a immédiatement

$$T_n(c_j) = \frac{n-j}{n}c_j \text{ si } n \geq j \text{ et } T_n(c_j) = 0 \text{ sinon.}$$

$$T_n(s_j) = \frac{n-j}{n}s_j \text{ si } n \geq j \text{ et } T_n(s_j) = 0 \text{ sinon.}$$

II Théorème de Korovkin sur $\mathcal{C}(I)$

II.1. La fonction f étant continue sur I compact, le théorème de Heine permet d'affirmer que f est uniformément continue sur I . Donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \forall (x, y) \in I^2 \quad |x - y| \leq \eta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Soient donc $\varepsilon > 0$ et η_ε défini comme ci-dessus. Soit $(x, t) \in I^2$. Nous allons traiter les deux cas $|t - x| \leq \eta_\varepsilon$ et $|t - x| > \eta_\varepsilon$ séparément :

i) Si $|t - x| \leq \eta_\varepsilon$, alors d'après l'uniforme continuité de f , on a

$$|f(t) - f(x)| \leq \varepsilon \leq \varepsilon + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2} (t - x)^2 \text{ car } 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2} (t - x)^2 \geq 0$$

ii) Si $|t - x| > \eta_\varepsilon$, alors

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\leq |f(t)| + |f(x)| \\ &\leq 2\|f\|_\infty \end{aligned}$$

Or $|t - x| > \eta_\varepsilon \implies \frac{(t-x)^2}{\eta_\varepsilon^2} > 1$, donc

$$|f(t) - f(x)| \leq 2\|f\|_\infty \times 1 \leq 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2} (t - x)^2 \leq \varepsilon + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2} (t - x)^2$$

On en conclut donc que

$$\forall (t, x) \in I^2 \quad |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2} (t - x)^2$$

II.2. Il suffit d'utiliser l'inégalité obtenue à la question précédente.

Soient $\varepsilon > 0$ et η_ε défini comme précédemment. On a alors

$$\begin{aligned} \forall (t, x) \in I^2 \quad |f(t) - f(x)| &\leq \varepsilon + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2} (t^2 - 2xt + x^2) \\ |f(t) - f(x)e_0(t)| &\leq \varepsilon e_0(t) + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2} (e_2(t) - 2xe_1(t) + x^2e_0(t)) \end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité demandée.

II.3. On a d'après la question précédente, la question I.1., la linéarité et la positivité de u

$$\begin{aligned} |u(f - f(x)e_0)| &\leq u(|f - f(x)e_0|) \\ &\leq u\left(\varepsilon e_0 + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2} (e_2 - 2xe_1 + x^2e_0)\right) \\ &\leq \varepsilon u(e_0) + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2} (u(e_2) - 2xu(e_1) + x^2u(e_0)) \end{aligned}$$

II.4. On remarque tout d'abord que pour tout $x \in I$

$$e_2(x) - 2e_1(x)e_1(x) + e^2(x)e_0(x) = x^2 - 2x^2 + x^2 = 0$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \|g_n\|_\infty &= \|u_n(e_2) - e_2 + 2e_1(u_n(e_1) - e_1) + e_2(u_n(e_0) - e_0)\|_\infty \\ &\leq \|u_n(e_2) - e_2\|_\infty + \|2e_1(u_n(e_1) - e_1)\|_\infty + \|e_2(u_n(e_0) - e_0)\|_\infty \\ &\leq \|u_n(e_2) - e_2\|_\infty + 2\|e_1\|_\infty\|u_n(e_1) - e_1\|_\infty + \|e_2\|_\infty\|u_n(e_0) - e_0\|_\infty \end{aligned}$$

Or les trois suites apparaissant dans le membre de droite de l'inégalité tendent vers 0 (car il y a convergence uniforme donc convergence pour la norme $\|\cdot\|_\infty$). On en conclut que $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.

II.4.2. D'après l'inégalité (10), on a

$$\begin{aligned} |h_n(x)| &\leq \varepsilon u_n(e_0)(x) + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2} (u_n(e_2)(x) - 2xu_n(e_1)(x) + x^2u_n(e_0)(x)) \\ &\leq \varepsilon u_n(e_0)(x) + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2} g_n(x) \\ \|h_n\|_\infty &\leq \varepsilon \|u_n(e_0)\|_\infty + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2} \|g_n\|_\infty \end{aligned}$$

Or $\|g_n\|_\infty$ tend vers 0 quand $n \in \mathbb{N}$ tend vers l'infini, donc

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \|g_n\|_\infty \leq \frac{\eta_\varepsilon^2}{2\|f\|_\infty} \varepsilon$$

Ainsi

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \|h_n\|_\infty \leq \varepsilon \|u_n(e_0)\|_\infty + \varepsilon$$

Or la quantité $\|u_n(e_0)\|_\infty$ reste bornée car $\|u_n(e_0) - e_0\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. On en déduit que la suite $(\|h_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle, donc que la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.

II.4.3. On a pour tout $x \in I$

$$h_n(x) = (u_n(f - f(x)e_0))(x) = (u_n(f) - f(x)u_n(e_0))(x) = u_n(f)(x) - f(x)u_n(e_0)(x)$$

Donc

$$u_n(f)(x) - f(x) = h_n(x) + f(x)(u_n(e_0)(x) - e_0(x)) \text{ car } e_0 = 1$$

On en déduit que

$$\|u_n(f) - f\|_\infty \leq \|h_n\|_\infty + \|f\|_\infty \|u_n(e_0) - e_0\|_\infty$$

Le membre de droite de l'inégalité tendant vers 0 quand n tend vers l'infini, on en conclut que $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

II.5. Compte tenu de ce qui précède, pour montrer que $(B_n(f))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f , il suffit de montrer que $(B_n(e_i))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers e_i pour $i = 0, 1, 2$ (car $B_n \geq 0$).

Etant donné que $B_n(e_0) = e_0$ et que $B_n(e_1) = e_1$, il reste à établir la convergence uniforme de $B_n(e_2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) e_2$. On a

$$\|B_n(e_2) - e_2\|_\infty = \frac{1}{n} \|e_2\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On en déduit que $(B_n(f))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f (ce résultat est en fait assez intuitif en faisant de simples raisonnements probabilistes).

II.6. On remarque tout d'abord que sur $[0, 1]$, $B_n(f)$ est un polynôme, donc de la question précédente on déduit la densité de $\mathbb{R}[x]$ dans $\mathcal{C}([0, 1])$ pour la norme de la convergence uniforme.

Si maintenant $I = [a, b]$, on considère la fonction $\tau_{a,b} : x \in [0, 1] \mapsto a + (b - a)x \in I$ (qui est polynômiale et de réciproque polynômiale). Soit $f \in \mathcal{C}(I)$, alors $f \circ \tau_{a,b} \in \mathcal{C}([0, 1])$. De la remarque précédente, on déduit alors que $(B_n(f \circ \tau_{a,b}))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers $f \circ \tau_{a,b}$, donc que $(B_n(f \circ \tau_{a,b}) \circ \tau_{a,b}^{-1})_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f . Par conséquent, $\mathbb{R}[x]$ est dense dans $\mathcal{C}(I)$ pour la norme de la convergence uniforme.

II.7.1. Montrons que la fonction $u_n(f)$ a bien un sens. On a pour $x \geq b$, $f(x) = f(b)$ donc

$$\begin{aligned} u_n(f)(x) &= e^{-nx} \sum_{0 \leq k \leq nb} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} x^k + e^{-nx} f(b) \sum_{k > nb} \frac{n^k}{k!} x^k \\ &= e^{-nx} \sum_{0 \leq k \leq nb} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{n^k}{k!} x^k + e^{-nx} f(b) \left(e^{nx} - \sum_{0 \leq k \leq nb} \frac{n^k}{k!} x^k \right) \\ &= e^{-nx} \sum_{0 \leq k \leq nb} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - 1 \right] \frac{n^k}{k!} x^k + f(b) \end{aligned}$$

Cette dernière somme étant finie, $u_n(f)$ a bien un sens. Remarquons de plus que u_n est trivialement une application linéaire positive de $\mathcal{C}(I)$ dans lui-même.

II.7.2. Nous avons les relations

$$\begin{aligned}
e^{-nx} \sum_{k \geq 0} \frac{n^k}{k!} x^k &= 1 \\
e^{-nx} \sum_{k \geq 0} \frac{k}{n} \frac{n^k}{k!} x^k &= x e^{-nx} \sum_{k \geq 1} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} x^{k-1} \\
&= x e^{-nx} \sum_{k \geq 0} \frac{n^k}{k!} x^k \\
e^{-nx} \sum_{k \geq 0} \frac{k}{n} \frac{n^k}{k!} x^k &= x \\
e^{-nx} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{n^k}{k!} x^k &= x e^{-nx} \sum_{k \geq 1} \frac{k}{n} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} x^{k-1} \\
&= x e^{-nx} \sum_{k \geq 0} \frac{k+1}{n} \frac{n^k}{k!} x^k \\
&= x e^{-nx} \sum_{k \geq 0} \frac{k}{n} \frac{n^k}{k!} x^k + \frac{x}{n} e^{-nx} \sum_{k \geq 0} \frac{n^k}{k!} x^k \\
e^{-nx} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{n^k}{k!} x^k &= x^2 + \frac{x}{n}
\end{aligned}$$

De ces trois relations, on déduit

$$e^{-nx} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \frac{n^k}{k!} x^k = \frac{x}{n}$$

De plus, on a

$$u_n(t \mapsto (t-x)^2)(x) = e^{-nx} \sum_{0 \leq k \leq nb} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \frac{n^k}{k!} x^k + e^{-nx} (b-x)^2 \sum_{k > nb} \frac{n^k}{k!} x^k$$

Or pour $\frac{k}{n} > b$, on a $(b-x)^2 < \left(\frac{k}{n} - x\right)^2$, on en déduit

$$u_n(t \mapsto (t-x)^2)(x) \leq e^{-nx} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 \frac{n^k}{k!} x^k = \frac{x}{n}$$

Nous avons vu à la question II.1. que

$$\forall (t, x) \in I^2 \quad |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2} (t-x)^2$$

On déduit de cette inégalité que

$$|u_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon u_n(e_0) + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2} u_n(t \mapsto (t-x)^2)(x) \leq \varepsilon + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\eta_\varepsilon^2} \frac{x}{n}$$

Ainsi, si $x \in I$ (qui est compact donc borné), on a pour n suffisamment grand

$$|u_n(f)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$$

d'où on en déduit la convergence uniforme de $(u_n(f))_{n \geq 1}$ vers f sur I .

II.8.1. On remarque que x_0, x_1, x_2 racines de θ est équivalent à

$$\begin{pmatrix} \theta_0(x_0) & \theta_1(x_0) & \theta_2(x_0) \\ \theta_0(x_1) & \theta_1(x_1) & \theta_2(x_1) \\ \theta_0(x_2) & \theta_1(x_2) & \theta_2(x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Appelons M la matrice apparaissant dans la relation précédente. L'existence de $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ implique la relation matricielle suivante

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \theta_0(x_0) & \theta_0(x_1) & \theta_0(x_2) \\ \theta_1(x_0) & \theta_1(x_1) & \theta_1(x_2) \\ \theta_2(x_0) & \theta_2(x_1) & \theta_2(x_2) \end{pmatrix}}_{{}^t M} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit donc $y \in (\text{Im } M)^\perp \setminus \{0\}$ (y existe car $(\text{Im } M)^\perp = \{0\}$ impliquerait que $\text{Ker } M = \{0\}$ ce qui n'est pas le cas puisque $(a_0, a_1, a_2) \in \text{Ker } M$ et que ce vecteur est non nul). Or $\forall x \in \mathbb{R}^3 \quad \langle {}^t M y, x \rangle = \langle y, M x \rangle = 0$. Donc pour $x = {}^t M y$, on a

$$\|{}^t M y\|^2 = \langle {}^t M y, {}^t M y \rangle = 0 \implies {}^t M y = 0$$

Posons

$$y' = \frac{y}{2 \max(|y_0|, |y_1|, |y_2|)}$$

On a clairement $|y'_k| < 1$ pour $k = 0, 1, 2$. Si au moins deux des y'_k sont positifs ou nuls alors on pose $\lambda = y'$, sinon on pose $\lambda = -y'$.

II.8.2. On remarque d'abord que $0 \leq \delta_n \leq 1$ donc $0 \leq e_0 - \delta_n \leq 1$. De plus $1 + \lambda_0 \geq 0$, donc si $f \geq 0$, alors $u_n(f)$ est clairement positif (car $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$).

II.8.3. On a

$$\begin{aligned} u_n(\theta_k) &= (e_0 - \delta_n)\theta_k + (\theta_k(x_0) + \lambda_0\theta_k(x_0) + \lambda_1\theta_k(x_1) + \lambda_2\theta_k(x_2))\delta_n \\ &= (e_0 - \delta_n)\theta_k + \theta_k(x_0)\delta_n \\ &= \theta_k + (\theta_k(x_0) - \theta_k)\delta_n \\ u_n(\theta_k) - \theta_k &= (\theta_k(x_0) - \theta_k)\delta_n \end{aligned}$$

La fonction θ_k étant continue en x_0 , on a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad |x - x_0| \leq \frac{1}{n_\varepsilon} \implies |\theta_k(x) - \theta_k(x_0)| \leq \varepsilon$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$. Soit, de plus, $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_\varepsilon$. On a

$$|u_n(\theta_k)(x) - \theta_k(x)| = |\theta_k(x_0) - \theta_k(x)| |\delta_n| \leq \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$$

On en déduit la convergence uniforme de $(u_n(\theta_k))_{n \geq 1}$ vers θ_k .

II.8.4. On remarque que $(\delta_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$. Ainsi pour toute fonction $f \in \mathcal{H}$, la suite de fonctions $(u_n(f))_{n \geq 1}$ converge simplement vers

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x = x_0 \\ (1 + \lambda_0)f(x_0) + \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc si $\lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \neq 0$ alors $u_n(f)(x_0) \neq f(x_0)$. On choisit alors une fonction f telle que $\lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \neq 0$. On en déduit que $(u_n(f))_{n \geq 1}$ converge simplement vers une fonction discontinue. Ainsi la convergence ne peut être uniforme.

III Théorème de Korovkin sur \mathcal{F}

III.1. Soit $f \in \mathcal{F}$. La fonction f étant continue sur \mathbb{R} , elle est alors continue sur $[-2\pi, 4\pi]$ qui est compact. Ainsi, d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[-2\pi, 4\pi]$. Soit $\varepsilon > 0$, on a

$$\exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \forall (t, x) \in [-2\pi, 4\pi]^2 \quad |t - x| \leq \eta_\varepsilon \implies |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Soit $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ tels que $|t - x| \leq \eta'_\varepsilon = \min(\eta_\varepsilon, 2\pi)$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel $t - 2k\pi \in [0, 2\pi]$, et posons $t' = t - 2k\pi$ et $x' = x - 2k\pi$. On a alors $|t' - x'| \leq \eta'_\varepsilon \leq \eta_\varepsilon$, $t' \in [0, 2\pi] \subset [-2\pi, 4\pi]$ et

$$-\eta'_\varepsilon \leq x' - t' \leq \eta'_\varepsilon \iff t' - \eta'_\varepsilon \leq x' \leq \eta'_\varepsilon + t' \iff -\eta'_\varepsilon \leq x' \leq \eta'_\varepsilon + 2\pi$$

Or $\eta'_\varepsilon \leq 2\pi$ et $-2\pi \leq -\eta'_\varepsilon$, donc

$$-\eta'_\varepsilon \leq x' \leq \eta'_\varepsilon + 2\pi \iff -2\pi \leq x' \leq 4\pi \iff x' \in [-2\pi, 4\pi]$$

On en déduit par 2π -périodicité de f que

$$|f(t) - f(x)| = |f(t') - f(x')| \leq \varepsilon$$

Par conséquent, f est uniformément continue sur \mathbb{R} .

III.2 Remarquons tout d'abord que $x \mapsto \sin^2(x)$ est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et π -périodique. Montrons qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $|t - x - 2k\pi| \leq \pi$.

Supposons qu'un tel k existe, on a alors

$$|t - x - 2k\pi| \leq \pi \iff (2k - 1)\pi \leq t - x \leq (2k + 1)\pi \iff 2k - 1 \leq \frac{t - x}{\pi} \leq 2k + 1$$

Posons $\ell = \left[\frac{t-x}{\pi} \right]$ ($[.]$ désignant la fonction partie entière). Si ℓ est impair, alors $k = \frac{\ell+1}{2}$ et si ℓ est pair, alors $k = \frac{\ell}{2}$ convient. Réciproquement, un tel choix de k implique que $|t - x - 2k\pi| \leq \pi$. Posons $t' = t - 2k\pi$.

Soient $\varepsilon > 0$ et $0 < \eta_\varepsilon < \pi$ venant de l'uniforme continuité de f sur \mathbb{R} (si $\eta_\varepsilon \geq \pi$, on le divise par $\pi + 1$). Si $|t' - x| \leq \eta_\varepsilon$, alors

$$|f(t) - f(x)| = |f(t') - f(x)| \leq \varepsilon \leq \varepsilon + 2 \frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta_\varepsilon)} \psi_x(t) \text{ car } \psi_x \geq 0$$

Supposons maintenant que $|t' - x| > \eta_\varepsilon$, on a alors

$$\begin{aligned} \eta_\varepsilon < |t' - x| \leq \pi &\implies 0 < \frac{\eta_\varepsilon}{2} < \frac{|t' - x|}{2} \leq \frac{\pi}{2} \\ &\implies \sin^2\left(\frac{\eta_\varepsilon}{2}\right) < \sin^2\left(\frac{|t' - x|}{2}\right) \\ &\implies 1 < \frac{\sin^2\left(\frac{|t' - x|}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\eta_\varepsilon}{2}\right)} \\ &\implies 1 < \frac{\sin^2\left(\frac{t-x-2k\pi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\eta_\varepsilon}{2}\right)} \\ &\implies 1 < \frac{\psi_x(t)}{\psi_0(\eta_\varepsilon)} \end{aligned}$$

On en déduit

$$|f(t) - f(x)| = |f(t') - f(x)| \leq 2\|f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty \frac{\psi_x(t)}{\psi_0(\eta_\varepsilon)} \leq \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta_\varepsilon)}\psi_x(t)$$

On en conclut que

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2 \quad |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon + 2\frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta_\varepsilon)}\psi_x(t)$$

III.3. D'après la question précédente

$$|f(t) - f(x)c_0(t)| \leq \varepsilon c_0(t) + 2\frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta_\varepsilon)} \sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right)$$

Or

$$\sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(t-x)}{2} = \frac{1}{2}(c_0(t) - \cos(x)c_1(t) - \sin(x)s_1(t))$$

Ainsi

$$|f - f(x)c_0| \leq \varepsilon c_0 + \frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta_\varepsilon)}(c_0 - \cos(x)c_1 - \sin(x)s_1)$$

III.4. D'après la question précédente et la question I.1., on a

$$\begin{aligned} |u(f - f(x)c_0)| &\leq u(|f - f(x)c_0|) \\ &\leq u\left(\varepsilon c_0 + \frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta_\varepsilon)}(c_0 - \cos(x)c_1 - \sin(x)s_1)\right) \\ |u(f - f(x)c_0)| &\leq \varepsilon u(c_0) + \frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta_\varepsilon)}(u(c_0) - \cos(x)u(c_1) - \sin(x)u(s_1)) \end{aligned}$$

III.5.1. L'égalité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ implique que $c_0 - c_1^2 - s_1^2 = 0$, on a donc

$$g_n = g_n - 0 = u_n(c_0) - c_0 + c_1(u_n(c_1) - c_1) + s_1(u_n(s_1) - s_1)$$

Ainsi pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand

$$\|g_n\|_\infty \leq \|u_n(c_0) - c_0\|_\infty + 1.\|u_n(c_1) - c_1\|_\infty + 1.\|u_n(s_1) - s_1\|_\infty \leq 3\varepsilon$$

Par conséquent, la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur \mathbb{R} .

III.5.2. D'après la question précédente et la question III.4., on a

$$|h_n(x)| \leq \varepsilon u_n(c_0)(x) + \frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta_\varepsilon)} g_n(x) \implies \|h_n\|_\infty \leq \varepsilon \|u_n(c_0)\|_\infty + \frac{\|f\|_\infty}{\psi_0(\eta_\varepsilon)} \|g_n\|_\infty$$

Or pour n suffisamment grand $\|g_n\|_\infty \leq \frac{\psi_0(\eta_\varepsilon)}{\|f\|_\infty} \varepsilon$, donc

$$\|h_n\|_\infty \leq \varepsilon \|u_n(c_0)\|_\infty + \varepsilon$$

comme la quantité $\|u_n(c_0)\|_\infty$ reste bornée (car $\|u_n(c_0) - c_0\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini), on en déduit la convergence uniforme de $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers la fonction nulle sur \mathbb{R} .

III.5.3. On a $u_n(f - f(x)c_0)(x) = u_n(f)(x) - f(x)u_n(c_0)$, ainsi

$$\|u_n(f) - f\|_\infty \leq \|h_n\|_\infty + \|f - fu_n(c_0)\|_\infty = \|h_n\|_\infty + \|f\|_\infty \|c_0 - u_n(c_0)\|_\infty$$

Le membre de droite de l'inégalité tendant vers 0 quand n tend vers l'infini, on en déduit que la suite $(u_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .

III.6. On a pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \|T_n(c_0) - c_0\|_\infty &= 0 \\ \|T_n(c_1) - c_1\|_\infty &= \frac{\|c_1\|_\infty}{n} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \|T_n(s_1) - s_1\|_\infty &= \frac{\|s_1\|_\infty}{n} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

On en déduit que les suites $(T_n(c_0))_{n \geq 1}$, $(T_n(c_1))_{n \geq 1}$, $(T_n(s_1))_{n \geq 1}$ convergent uniformément respectivement vers c_0 , c_1 , s_1 . D'après la question précédente, on peut en conclure que pour toute fonction $f \in \mathcal{F}$, la suite $(T_n(f))_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .