Concours du C.A.P.E.S
Première Epreuve

(Analyse) Session 1999 Interne

APPROXIMATION DE LIGNES TRIGONOMÉTRIQUES ET DE FONCTIONS CIRCULAIRES

Au Livre I de sa « Composition mathématique » (l'*Almageste*, rédigée au IIᵉ siècle), Claude Ptolémée entreprend la construction explicite d'une table donnant la longueur d'une corde d'un cercle, dont le diamètre a pour mesure 120 et dont la circonférence est partagée en 360 parties égales, en fonction de l'arc sous-tendu.

La détermination de la longueur des cordes, puis des lignes trigonométriques, donna, au cours des siècles, matière à de très nombreux travaux. Les parties I et II proposent d'examiner quelques techniques d'approximation. Dans la partie III, on examine quelques résultats cités ou mis à jour par Claude Ptolémée. Les trois parties sont indépendantes.

I

Étude de méthodes d'approximation du sinus et du cosinus

Dans cette partie, on suppose que les fonctions circulaires ont été introduites au niveau d'un enseignement de lycée, par exemple par l'image de l'enroulement d'un fil, que le lien avec la géométrie a été fait (les formules d'addition sont connues, les éléments de symétrie des courbes représentatives aussi). *On admet :*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (*).$$

1. Montrer que (*) permet d'établir que, pour tout x réel, il existe une fonction ε telle que :

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0 \quad \text{et pour tout } h \text{ réel} \quad \cos(x+h) - \cos x = -h \sin x + h\,\varepsilon(h)$$

et que les fonctions cosinus et sinus sont dérivables en tout point x.

2. ***Étude d'un schéma d'approximation décentré.***

A tout réel t on associe les suites $(C_n(t))$ et $(S_n(t))$ définies par les relations :

$$C_0(t) = 1, \qquad S_0(t) = 0 \qquad \text{et pour tout entier } n \geqslant 0 \quad \begin{cases} C_{n+1}(t) = C_n(t) - t\,S_n(t) \\ S_{n+1}(t) = t\,C_n(t) + S_n(t). \end{cases}$$

a. On s'attend à ce que, pour t petit, $C_n(t)$ et $S_n(t)$ soient des valeurs approchées de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$. Pourquoi? (On pourra introduire les suites $(U_n(t))$ et $(V_n(t))$ où $U_n(t) = \cos nt$ et $V_n(t) = \sin nt$ et les caractériser sous une forme proche de celle de $(C_n(t))$ et de $(S_n(t))$.)

b. Calculer $C_3(t)$ et $S_3(t)$.

c. Montrer que, pour tout x élément de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \leqslant x.$$

d. Vérifier que, pour tout x élément de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant S_3\left(\frac{x}{3}\right) \leqslant x.$$

A-t-on $S_3\left(\frac{x}{3}\right) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$?

e. Montrer qu'il existe un nombre complexe $z(t)$ tel que, pour tout entier naturel n, on ait :

$$C_n(t) + i\,S_n(t) = \big(z(t)\big)^n.$$

Montrer que pour tout t différent de 0 on a :

$$\lim_{n \to \infty} \left[\big(C_n(t)\big)^2 + \big(S_n(t)\big)^2\right] = +\infty.$$

En quoi ce résultat est-il inquiétant pour la qualité des approximations obtenues?

f. Étudier le comportement de la suite de fonctions, définies sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^n.$$

Peut-on espérer que pour n assez grand et x fixé, $C_n\left(\dfrac{x}{n}\right)$ et $S_n\left(\dfrac{x}{n}\right)$ soient proches de $\cos x$ et $\sin x$?

g. Donner les valeurs obtenues à l'aide d'une calculatrice programmable pour $S_6\left(\dfrac{\pi}{180}\right)$ et $S_{12}\left(\dfrac{\pi}{360}\right)$.

Comparer avec la valeur fournie par la calculatrice pour $\sin\left(\dfrac{\pi}{30}\right)$.

3. ***Étude d'un schéma centré.***

Dans le schéma précédent, on passe du point de coordonnées $(x, \cos x)$ au point de coordonnées $\left(x + h, \overline{\cos(x+h)}\right)$, où $\overline{\cos(x+h)}$ est une valeur approchée de $\cos(x+h)$, en suivant la tangente à la courbe représentative du cosinus au point de coordonnées $(x, \cos x)$. Dans le schéma centré proposé à présent, on suit la droite passant par le point de coordonnées $(x, \cos x)$ et ayant pour pente la demi-somme des pentes des tangentes aux points de coordonnées respectives $(x, \cos x)$ et $\big(x + h, \cos(x+h)\big)$.

a. En utilisant un encadrement analogue à celui du I.2.*c*., justifier, pour tout x réel, l'existence d'une fonction η telle que $\lim\limits_{h \to 0} \eta(h) = 0$ et que pour tout h réel on ait :

$$\cos(x+h) - \cos x + \frac{h}{2}\big(\sin(x+h) + \sin x\big) = h^2\,\eta(h).$$

b. Montrer que, pour tout réel strictement positif t, les relations :

$\Gamma_0(t) = 1$, $\quad \Sigma_0(t) = 0$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$ $\begin{cases} 2\,\Gamma_{n+1}(t) + t\,\Sigma_{n+1}(t) = 2\,\Gamma_n(t) - t\,\Sigma_n(t) \\ t\,\Gamma_{n+1}(t) - 2\,\Sigma_{n+1}(t) = -t\,\Gamma_n(t) - 2\,\Sigma_n(t) \end{cases}$

permettent de définir deux suites $\big(\Gamma_n(t)\big)$ et $\big(\Sigma_n(t)\big)$.

c. Calculer $\Gamma_1(t)$ et $\Sigma_1(t)$.

d. Montrer que, pour tout t strictement positif, il existe un nombre complexe $\zeta(t)$ tel que pour tout entier naturel n on ait :

$$\Gamma_n(t) + i\,\Sigma_n(t) = \big(\zeta(t)\big)^n.$$

e. Quel est le module de $\zeta(t)$?

f. Donner la valeur obtenue à l'aide d'une calculatrice pour $\Sigma_6\left(\dfrac{\pi}{180}\right)$.

4. ***Algorithme utilisant la duplication.***

La valeur approchée $\Gamma_1(t)$ obtenue pour $\cos t$ grâce au schéma précédent, pour de très petites valeurs de t, est utilisée dans cet algorithme comme point de départ.

a. Montrer que, pour tout t élément de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$1 - \frac{t^2}{2} \leqslant \cos t \leqslant 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}$$

$$\text{et} \quad 1 - \frac{t^2}{2} \leqslant \Gamma_1(t) \leqslant 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8}.$$

b. On note f l'application $x \rightarrow 2x^2 - 1$. On pose $f_1 = f$ et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 on définit f_n par $f_n = f_{n-1} \circ f$. Justifier que $f_n(\cos t) = \cos(2^n t)$.

c. Calculer, à l'aide de la calculatrice, $f_5\left(\Gamma_1\left(\frac{\pi}{192}\right)\right)$. La valeur approchée de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ obtenue paraît-elle satisfaisante ?

d. Calculer de même $f_{20}\left(\Gamma_1\left(\frac{\pi}{6 \cdot 2^{20}}\right)\right)$. Comment expliquer ce résultat ?

Approximation du sinus comme solution d'une équation différentielle

Dans cette partie, la fonction sinus est définie comme l'unique solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants satisfaisant deux données initiales. Une suite est construite sur le modèle de cette équation.

1. On se propose tout d'abord de reétablir un résultat classique.

   On considère l'équation différentielle (E) dont les solutions sont des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivables :

$$f + f'' = 0 \qquad \text{(E)}.$$

   a. Montrer que l'ensemble F des solutions de cette équation est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

   b. Montrer que les fonctions sin et cos sont des solutions de cette équation.

   c. Montrer que le sous-espace vectoriel de F engendré par sin et cos est de dimension 2.

   d. Pour toute fonction ϕ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ deux fois dérivable, montrer qu'on peut trouver deux fonctions u et v, dérivables, telles que pour tout réel t on ait :

$$\begin{cases} u(t)\cos t + v(t)\sin t = \phi(t) \\ -u(t)\sin t + v(t)\cos t = \phi'(t). \end{cases}$$

   e. En déduire que les fonctions sin et cos constituent une base de F.

   f. En déduire finalement que la fonction sin est la seule solution de (E) satisfaisant les conditions initiales

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = 1\ .$$

2. ***Mise en place d'un schéma d'approximation.***

   a. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable, montrer que, pour tout x réel, il existe une fonction v vérifiant :

$$\lim_{h \to 0} v(h) = 0 \qquad \text{et pour tout } h \text{ réel} \qquad f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) = h^2 f''(x) + h^2 v(h)\ .$$

   b. Pour tout réel t, on définit la suite $(s_n(t))$, qu'on notera plus simplement (s_n), par :

$$s_0 = 0, \qquad s_1 = t \qquad \text{et, pour tout entier naturel } n \geqslant 1, \quad s_{n+1} - 2\,s_n + s_{n-1} = -\,t^2\,s_n\,.$$

   Justifier que, comme dans la partie I, on peut s'attendre à ce que $s_n\left(\dfrac{x}{n}\right)$ soit une valeur approchée de $\sin\ x$.

   c. Montrer qu'il existe deux constantes A et B et un nombre complexe z de module 1, dépendant de t, tel que pour t suffisamment petit les termes de la suite (s_n) s'écrivent :

$$s_n = \mathrm{A}\, z^n + \mathrm{B}\, \bar{z}^n.$$

   (On pourra utiliser le fait que l'ensemble des suites réelles (s_n) vérifiant $s_{n+1} - 2\,s_n + s_{n-1} = -\,t^2\,s_n$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$).

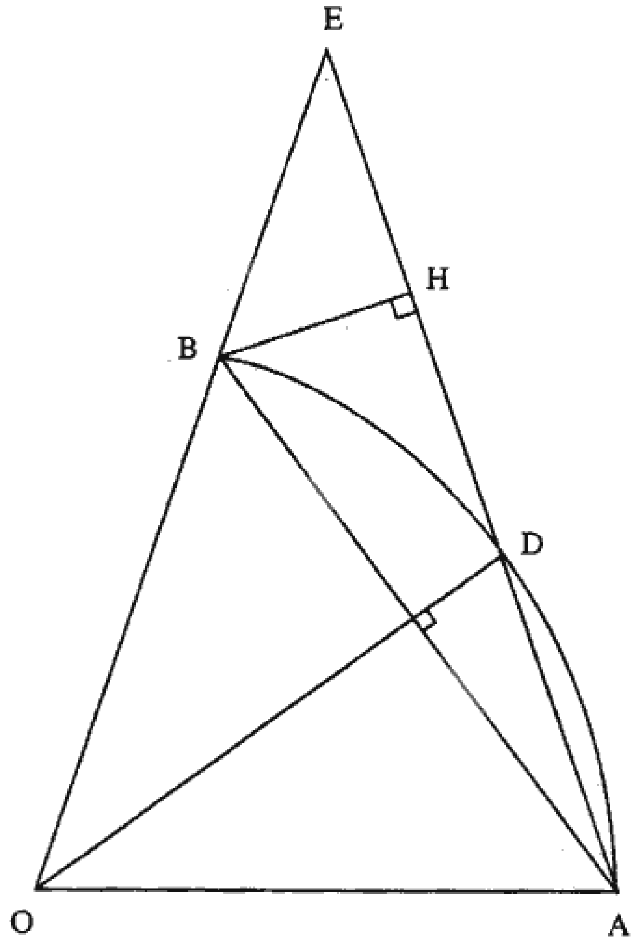
   d. On note θ un argument de z dans l'intervalle $\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Exprimer le nombre $s_n\left(\dfrac{x}{n}\right)$ en fonction de θ, puis en fonction de x et de n.

La « Table des droites inscrites dans le cercle » de Claude Ptolémée

Dans cette partie, on examine quelques résultats cités ou mis à jour par Claude Ptolémée et qui interviennent dans la confection de la table. Le langage utilisé est moderne. Le candidat n'a pas à craindre les anachronismes, hormis naturellement l'utilisation prématurée de lignes trigonométriques... On n'utilisera donc pas les fonctions sin, cos et tan dans les parties III.1., III.2. et III.3.

1. *Détermination de quelques valeurs exactes (exemples).*

Dans la figure ci-dessous, [AB] est le côté d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle de rayon [OA], [AD] celui d'un décagone régulier inscrit dans le même cercle. (OB) et (AD) se coupent en E.



a. Montrer que les triangles OAB, DAB, EOA et BDE sont isocèles.

b. En déduire que ED = OA et que EB = DA.

c. Montrer que $\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{OA}} = \dfrac{\mathrm{ED}}{\mathrm{OE}}$.

Montrer que cette égalité permet un calcul explicite de DA en fonction du rayon OA du cercle.

d. En considérant des triangles rectangles de sommet H, montrer que :

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{AD}^2.$$

« Le carré du côté du pentagone est égal à la somme des carrés des côtés du décagone et de l'hexagone inscrits dans le même cercle ».

e. Pour DA, Ptolémée fournit la valeur $37^p\,4'\,55''$, où ^{p} indique l'unité (le diamètre est 120^p), le système utilisé étant sexagésimal. Estimer la qualité de l'approximation.

2. ***Le théorème de Ptolémée (version moderne).***

On donne quatre points trois à trois non alignés A, B, C, D et la similitude directe σ de centre A transformant B en C. On pose :

$$\sigma(D) = E.$$

a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe τ transformant B en D et C en E et que cette similitude a pour centre A.

b. En déduire que : $AC \cdot BD = AB \cdot CE$

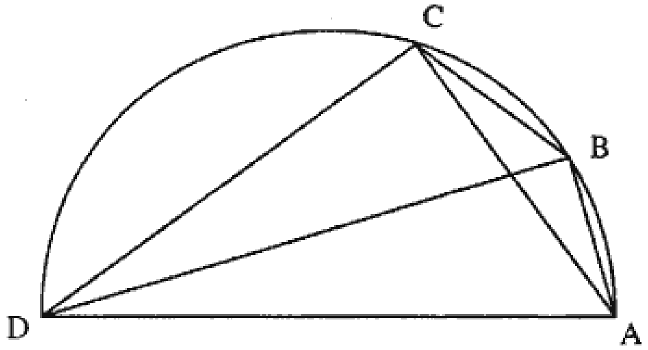
et que : $AD \cdot BC = AB \cdot DE$,

puis que : $AC \cdot BD + AD \cdot BC \geqslant AB \cdot CD$.

c. Montrer finalement que *le quadrilatère convexe ACBD est inscriptible si et seulement si :*

$$AC \cdot BD + AD \cdot BC = AB \cdot CD.$$

3. ***Une formule pour les différences d'arcs.***



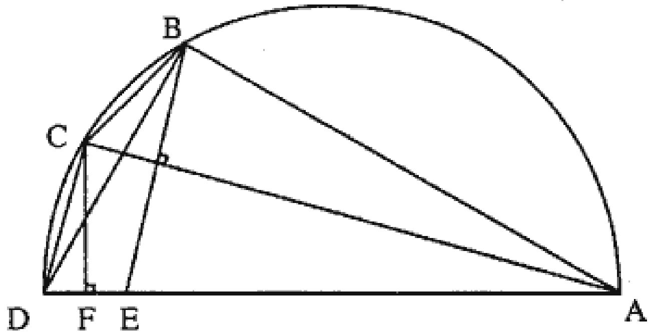
a. Montrer que l'application dans la situation ci-dessus ([AD] est un diamètre donné) du théorème précédent permet le calcul explicite de la corde BC lorsque AB et AC sont connues.

b. Dans le cercle de référence (voir introduction), quelle est la longueur de la corde sous-tendant un arc de 12° ? On donnera le résultat dans le système sexagésimal utilisé par Ptolémée.

Le théorème précédent permet également d'établir une formule pour les sommes d'arcs. Elle n'est pas demandée ici.

4. ***Une formule de dichotomie.***

Dans la figure ci-dessous, [AD] est un diamètre et les cordes [BC] et [CD] sont de même mesure. E est l'image de B dans la réflexion d'axe (AC) et F le projeté orthogonal de C sur (AD). Exprimer CD en fonction de BD et de AD.



Ptolémée indique qu'il peut, grâce à ces résultats, parvenir à déterminer la longueur de la corde sous-tendant un angle de un degré et demi, et même bien sûr de la moitié de cette valeur, mais qu'il ne parvient pas à déterminer exactement la longueur de la corde sous-tendant un angle de un degré (ce qui se ramènerait à un problème de trisection). Il met donc en œuvre un procédé d'approximation.

5. ***Recherche d'une valeur approchée de la corde sous-tendant un angle de un degré.***

Des comparaisons fines de rapports d'aires conduisent Ptolémée au résultat suivant, admis dans ce problème :

Deux arcs inégaux, $\widehat{AB}$ et $\widehat{BC}$, dont $\widehat{AB}$ est le plus petit, sont sous-tendus par des cordes croissant en moindre raison :

$$\text{si } \widehat{AB} < \widehat{BC} \text{ alors } \frac{AB}{BC} > \frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} \qquad (**).$$

a. Appliquer le résultat précédent à la corde AB sous-tendant l'arc de 1°, sachant que les mesures trouvées par Ptolémée pour les cordes AC et AG sous-tendant respectivement les arcs de 1°30′ et 45′ sont :

$$\mathrm{AC} \cong 1^p\,34'\,15'' \quad \text{et} \quad \mathrm{AG} \cong 0^p\,47'\,8''.$$

b. Estimer la qualité de l'approximation.

c. En étudiant les variations de la fonction $x \to \dfrac{x}{\sin x}$ sur un intervalle convenable, et en utilisant un langage moderne, retrouver le résultat (**).