Concours du C.A.P.E.S
Deuxième Epreuve

(Algèbre&Géométrie) Session 2000 Interne

PREMIÈRE PARTIE

AUTOUR DE THALÈS

Le but de cette partie est de proposer une approche du théorème de Thalès à l'aide des connaissances du collège. On suppose que les notions de longueur d'un segment, d'aire d'un polygone dans un plan sont connues ainsi que leurs propriétés usuelles.

1. La démonstration du théorème de Thalès par les aires.

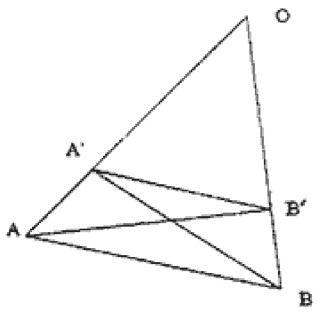
1. 1. On admet que si ABCD est un rectangle de longueur L et de largeur l, alors l'aire de ce rectangle est $L \cdot l$, et que deux triangles superposables ont même aire.

1.1.*a*. Démontrer les formules classiques donnant les aires d'un parallélogramme et d'un triangle.

1.1.*b*. Comparer les aires de deux triangles de même base [BC] et dont les sommets A et A' sont sur une parallèle à (BC).

1.1.*c* Que peut-on dire des aires de deux triangles ayant pour hauteur le même segment [A, A'] ? Généraliser à deux triangles tels que chacun ait une hauteur de longueur h où h est un réel positif donné.

1.2. ***Le théorème de Thalès.***



1.2.*a*. Dans la configuration ci-dessus où (A'B') est parallèle à (AB), que peut-on dire des aires des triangles OAB' et OA'B ?

1.2.*b*. Montrer que $\dfrac{\text{aire (OAB)}}{\text{aire (OA'B)}} = \dfrac{OA}{OA'}$ où aire (LMN) désigne l'aire du triangle LMN.

1.2.*c*. En déduire la relation : $\dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{OB}{OB'}$ (forme élémentaire du théorème de Thalès).

1.3. Montrer qu'on a aussi $\dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{OB}{OB'} = \dfrac{AB}{A'B'}$.

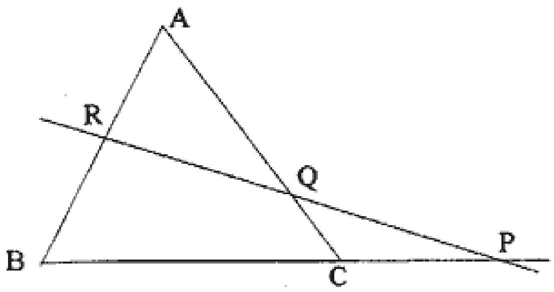
1.4. Énoncer et démontrer une réciproque de la forme élémentaire du théorème de Thalès donnée en 1.2.*c*.

2. Donner une situation simple faisant intervenir le théorème de Thalès et une situation simple où on utilise cette réciproque en détaillant les démonstrations.

3. Plus généralement, soit ABC un triangle et (d) une droite parallèle à (BC) qui coupe (AB) en E et (AC) en F, montrer que :

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}.$$

4. Étant donné un triangle ABC coupé par une sécante en trois points distincts P, Q, R (voir figure), on construit la parallèle à cette sécante passant par A, elle coupe (BC) en un point I.



4.1. Exprimer les rapports $\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$ et $\dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}}$ en utilisant les points P, I, B et C.

4.2. Déduire de ce qui précède que :

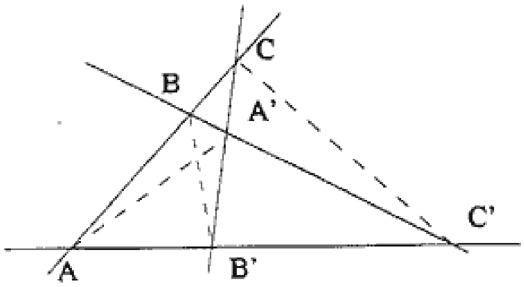
$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1 .$$

Énoncer et démontrer une réciproque de ce résultat. (L'ensemble de ce résultat et de sa réciproque est connu sous le nom de théorème de Ménélaüs).

DEUXIÈME PARTIE

LE THÉORÈME DE NEWTON

L'objet de cette partie est d'étudier de plusieurs façons la configuration dite du « quadrilatère complet » formé par quatre droites (ABC), (AB′C′), (BA′C′) et (CA′B′) (où les points sont deux à deux distincts) complétées par les diagonales (AA′), (BB′), (CC′) et de démontrer l'alignement des points I, J, K respectivement milieux des segments [AA′], [BB′] et [CC′] (*Théorème de Newton*).



Les trois méthodes suivantes sont complètement indépendantes.

1. **Première méthode : par le produit vectoriel.**

1.1. Soit E l'ensemble des points M vérifiant :

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA'} \wedge \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MA'} \wedge \overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

1.1.*a*. En introduisant $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA'} = 2\,\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB'} = 2\,\overrightarrow{MJ}$, démontrer que E est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{MJ} = \vec{0}.$$

1.1.*b*. Montrer que I et J sont deux points de E. Décrire l'ensemble E.

1.2.*a*. En introduisant les points C et C′ et les relations :

$$\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CA},\ \ \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CB},\ \ldots\ldots,\ \ \overrightarrow{KA} = \overrightarrow{KC'} + \overrightarrow{C'A},\ \ldots\ldots$$

vérifier que K est un élément de E.

1.2.*b*. En déduire que I, J, K sont alignés.

2. **Deuxième méthode : par le produit scalaire.**

Soit P un point du plan et (C) un cercle de centre O et de rayon R.

2.1.

2.1.*a*. Soient A et A′ deux points diamétralement opposés de (C), montrer que :

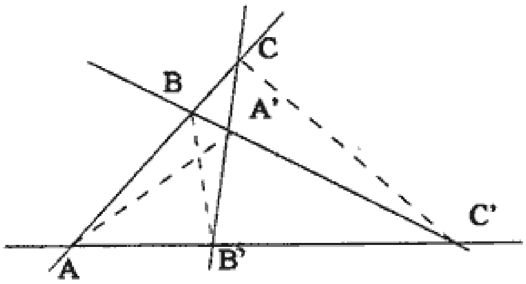
$$p = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PA'} = OP^2 - R^2.$$

2.1.*b*. Démontrer que pour toute droite passant par P et sécante au cercle en B et C, on a $p = \overline{PC} \cdot \overline{PB}$.
On pourra utiliser le point B′ diamétralement opposé à B sur le cercle.
Le nombre p est appelé la puissance du point P par rapport au cercle (C).

2.2. Étant donné deux cercles (C) et (C') de centres O et O′ distincts et de rayons R et R′, montrer que l'ensemble des points P ayant même puissance par rapport à (C) et (C') est une droite perpendiculaire à la droite (OO′).

2.3. On considère la configuration ci-dessous du « quadrilatère complet ». Soit H l'orthocentre du triangle A'B'C'. Montrer que :

$$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HA'}=\overrightarrow{HB'}\cdot\overrightarrow{HA'}=\overrightarrow{HB'}\cdot\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HC'}\ .$$



2.4. En considérant de même les orthocentres des triangles ABC', AB'C et A'BC, montrer que ces orthocentres ont même puissance par rapport aux cercles ayant pour diamètre [AA'], [BB'] et [CC']. En déduire que les milieux des segments [AA'], [BB'] et [CC'] sont alignés.

3. **Troisième méthode : par le théorème de Ménélaüs** (cf. Première partie, 4.).

3. 1. Soit A, B, C, D quatre points alignés et O un point non situé sur cette droite. Tracer la parallèle à (OA) passant par B. Elle coupe (OC) en I et (OD) en J.

3.1.*a*. Exprimer le rapport $\frac{IB}{OA}$ à l'aide de CA et CB.

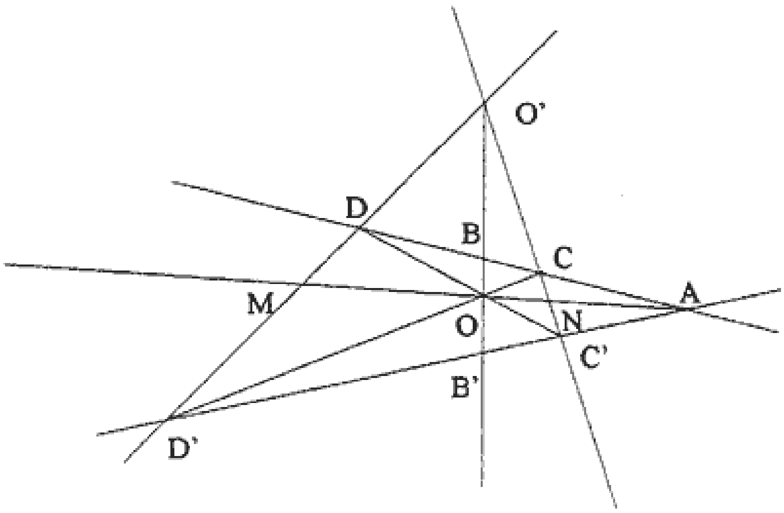
3.1.*b*. Exprimer le rapport $\frac{JB}{OA}$ à l'aide de DA et DB.

3.1.*c*. En déduire la relation : $\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}:\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BI}}{\overline{BJ}}$.

3.1.*d*. Si B est le milieu de [IJ] (ce qui est équivalent à dire, d'après ce qui précède, que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}:\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=-1\ ),$$

on dit que <u>(A, B, C, D) est une division harmonique</u>. Montrer qu'alors toute droite rencontrant les droites (OA), (OB), (OC) et (OD) en quatre points appelés respectivement A', B', C', D' est coupée selon une division harmonique.



3.2. On considère la configuration fournie par deux droites sécantes en O′ et deux sécantes (ACD) et (AC′D′). Appelons O le point commun à (CD′) et (DC′), puis B et B′ les points d'intersection de (OO′) avec les deux sécantes. Les points A, B, C, D sont distincts et O′ n'est pas sur la droite qui contient ces points.
En utilisant 3.1.*c*., on veut comparer :

$$k = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} : \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \quad \text{et} \quad k' = \frac{\overline{AD'}}{\overline{AC'}} : \frac{\overline{B'D'}}{\overline{B'C'}} .$$

3.2.*a*. En considérant quatre droites passant par O′, montrer que $k = k'$.

3.2.*b*. En considérant quatre droites passant par O, montrer que $kk' = 1$.

3.2.*c*. En déduire que les divisions (A, B, C, D) et (A, B′, C′, D′) sont harmoniques.

3.2.*d*. Montrer que si on appelle M le point commun à (O′D) et (OA) et N le point commun à (O′C) et (OA), la division (A, O, N, M) est harmonique.

3.3. Soit (A, B, C, D) une division harmonique et I le milieu de [AB].

3.3.*a*. Montrer que $IA^2 = IB^2 = \overline{IC} \cdot \overline{ID}$.

3.3.*b*. Prouver que $\dfrac{\overline{IC}}{\overline{ID}} = \left(\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}}\right)^2$.

3.4. On considère la configuration du « quadrilatère complet ». Soit I, J, K les milieux de [AA′], [BB′] et [CC′],

3.4.*a*. Montrer que

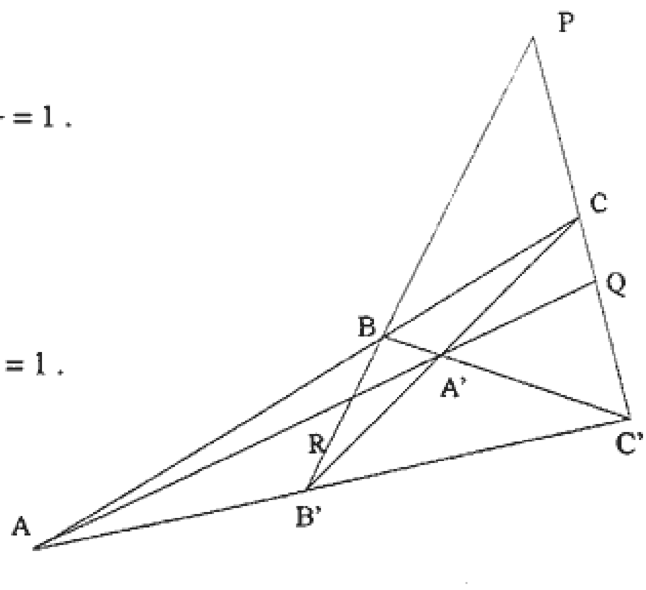
$$\frac{\overline{AR}}{\overline{AQ}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{CP}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{BR}} = 1 .$$

(On pourra utiliser le triangle PQR).

3.4.*b*. Montrer que

$$\frac{\overline{IR}}{\overline{IQ}} \cdot \frac{\overline{KQ}}{\overline{KP}} \cdot \frac{\overline{JP}}{\overline{JR}} = 1 .$$

En déduire que I, J, K sont alignés.



TROISIÈME PARTIE

LES THÉORÈMES DE PASCAL, BRIANCHON, DUALITÉ PAR PÔLES ET POLAIRES

1. Le théorème de Pascal.

Soit un hexagone dont les sommets A, B, C, D, E, F sont sur un même cercle et soit α, β, γ, les points d'intersection respectifs des droites (AB) et (ED), (BC) et (EF), (CD) et (FA). [On suppose que ces trois points existent].

Le théorème de Pascal affirme que ces trois points sont alignés. Démontrez-le.

Indication : Soient I, J, K les points d'intersection de (AF) et (ED), (ED) et (BC), (BC) et (AF). Appliquer le théorème de Ménélaüs au triplet (α, A, B) et à deux triplets analogues.

2. Pôles et polaires par rapport à un cercle.

Soit (Γ) un cercle de centre O et de rayon R. On dira que les points A et A′ sont conjugués par rapport à (Γ) si

$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = R^2 .$$

2.*a*. Déterminer l'ensemble (a) des conjugués de A. On dira que <u>(a) est la polaire du point A par rapport au cercle (Γ)</u> et réciproquement que <u>A est le pôle de (a) par rapport au cercle (Γ)</u>.

2.*b*. Que peut-on dire des conjugués d'un point A ?
- Si A est à l'intérieur du cercle (Γ) ?
- Si A est sur le cercle (Γ) ?
- Si A est à l'extérieur du cercle (Γ) ?

2.*c*. On suppose que A est à l'extérieur de (Γ). Montrer que les points de contact des tangentes issues de A à (Γ) appartiennent à (a).

2.*d*. Soient A et B deux points. Étudier $(a) \cap (b)$. Lorsque cet ensemble est un point, quelle est sa polaire ?

2.*e*. Que peut-on dire des polaires de trois points alignés ? De l'ensemble des pôles de toutes les droites passant par un point donné ? (On parlera ici de <u>propriétés duales</u> : à une propriété d'un système de droites et de points correspondra une propriété des pôles et polaires associés.)

2.*f*. Lorsque A est à l'extérieur du cercle (Γ), le résultat de la question 2.*c*. permet de construire facilement sa polaire. Montrer comment ce résultat peut être utilisé pour construire la polaire d'un point intérieur au cercle (Γ).

3. Le théorème de Brianchon comme dual du théorème de Pascal.

Soit un hexagone dont les côtés (a), (b), (c), (d), (e), (f) sont respectivement tangents à un cercle (Γ) aux points A, B, C, D, E, F. (On dira que cet hexagone est circonscrit au cercle (Γ).) En appliquant le théorème de Pascal à l'hexagone ABCDEF, en déduire le théorème de Brianchon (Dans un hexagone A′B′C′D′E′F′ circonscrit à un cercle (Γ), les diagonales (A′D′), (E′B′) et (F′C′) sont concourantes) pour l'hexagone initial.

4. Quelques applications.

4.*a*. Énoncer les propriétés obtenues à partir des théorèmes de Pascal et Brianchon, si on regarde un triangle comme un hexagone dont les sommets (resp. les côtés) ont tendu l'un vers l'autre, deux à deux, en restant sur le cercle circonscrit (resp. en restant tangents au cercle inscrit).

4.*b*. Soit un cercle (Γ). On dira que le triangle ABC est autopolaire si les droites (BC), (CA), (AB) sont les polaires respectives des sommets A, B, C.

Existe-t-il de tels triangles ?

Un triangle étant donné, peut-on toujours trouver un cercle par rapport auquel il est autopolaire ?