

# CAPES INTERNE DE MATHÉMATIQUES SESSION 2002

## ÉTUDE DU COMPORTEMENT D'UNE SUITE EN FONCTION DE SA VALEUR INITIALE

On considère un nombre réel  $a$  et on définit la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{n+2} \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$$

Le but de cet exercice est d'étudier, pour différentes valeurs de  $a$ , le comportement de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

1. Etude d'un premier cas particulier.

Dans cette question, on suppose que  $a = \frac{1}{2}$ .

- (a) Calculer la valeur exacte de  $u_1$  et  $u_2$ .
- (b) Donner, pour chacun des nombres  $u_1$  et  $u_2$ , un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  à bornes décimales.
- (c) Montrer que, pour tout  $n$  entier naturel, on a :

$$0 < u_n \leq 1$$

(d) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers 0.

2. Etude d'un second cas particulier.

Dans cette question, on suppose que  $a = 2$ .

- (a) Calculer la valeur réelle exacte, puis donner une valeur approchée décimale à  $10^{-2}$  près de  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ .
- (b) On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par

$$f(x) = e^x - (x+1)(x+2)$$

- i. Étudier le signe de  $f''$ .
- ii. Montrer que  $f'$  est strictement positive sur l'intervalle  $[2, +\infty[$ .
- iii. Dédire de ce qui précède que  $f$  est strictement positive sur l'intervalle  $[3, +\infty[$ .
- (c) Montrer que, pour tout  $n \geq 0$ , on a  $u_n \geq n$ .
- (d) Montrer que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  diverge vers  $+\infty$ .

3. Etude du cas général.

On revient au cas général où  $a$  est un nombre réel quelconque. On désigne par  $E_a$  l'ensemble des indices  $n > 0$  tels que  $u_n$  est strictement inférieur à 1 :

$$E_a = \{n \in \mathbb{N}^*; u_n < 1\}$$

- (a) Déterminer  $E_{1/2}$  et  $E_2$ .
- (b) Démontrer que, si  $E_a$  n'est pas vide, la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge vers 0.
- (c) Démontrer que, si  $E_a$  est vide, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq \ln(n+2)$$

et en déduire, dans ce cas, que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  diverge vers  $+\infty$ .

4. Détermination d'une partition de  $R$  en fonction du comportement de la suite.  
On désigne par  $A_0$  l'ensemble des réels  $a$  tels que  $E_a$  n'est pas vide et par  $A_\infty$  celui des réels  $a$  tels que  $E_a$  est vide.

- (a) Montrer que  $A_0$  et  $A_\infty$  sont deux intervalles complémentaires de  $R$ .
- (b) Montrer qu'il existe un nombre réel  $m > 0$  tel que :

$$]-\infty, m[ \subset A_0 \subset ]-\infty, m] \text{ et } ]m, +\infty[ \subset A_\infty \subset [m, +\infty[$$

- (c) En déduire un algorithme permettant de trouver une valeur approchée de  $m$  à  $10^{-2}$  près.
- (d) A l'aide d'une calculatrice, déterminer une valeur approchée de  $m$  à  $10^{-2}$  près.
- (e) Déterminer auquel des deux intervalles  $A_0$  ou  $A_\infty$  appartient le nombre réel  $m$ .

## GEOMETRIE DANS LE PLAN COMPLEXE

*Ce problème comporte deux parties : la partie I permet de retrouver des résultats classiques de géométrie du triangle ; la partie II aborde des questions relatives à la droite. Ces deux parties sont indépendantes l'une de l'autre, à l'exception de la question II.5. qui utilise des résultats de la partie I.*

Dans tout le problème, on se place dans le plan affine euclidien.

On rappelle que, dans un triangle, le pied de la hauteur passant par un sommet est l'intersection de cette hauteur avec le côté opposé à ce sommet.

D'autre part,  $z$  étant un nombre complexe, on désigne par  $\bar{z}$  son conjugué et par  $|z|$  son module.

### Partie I

#### 1. Question préliminaire

*Définition 1 :* On appelle *quadrangle* toute figure du plan formée par six droites joignant deux à deux quatre points du plan non alignés trois à trois. La figure ci-dessus représente le quadrangle  $(MNPQ)$ . Les points  $M, N, P, Q$  sont les *sommets* de ce quadrangle et les segments  $[MN], [NP], [PQ], [QM], [PM], [QN]$  en sont les *côtés*.

*Définition 2 :* On dit qu'un quadrangle est orthocentrique si et seulement si, chacun de ses sommets est l'orthocentre du triangle formé par les trois autres sommets.

- (a) Démontrer qu'un quadrangle  $(MNPQ)$  est orthocentrique si et seulement si le point  $M$  est l'orthocentre du triangle  $NPQ$ .

On se place désormais dans le plan complexe rapporté au repère cartésien orthonormal direct  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , et on appelle  $\Gamma$  le cercle de centre  $O$  et de rayon 1. Soit  $A, B, C$  trois points distincts de  $\Gamma$  tels que le triangle  $ABC$  ne soit pas rectangle. On note  $a, b, c$  les affixes respectives des points  $A, B, C$ . Le point  $M$  d'affixe  $m$  sera parfois noté  $M(m)$ .

- (b) Tracer une figure soignée représentant l'ensemble des situations étudiées dans la partie I. On complètera cette figure au fur et à mesure des questions qui seront traitées.

## 2. Construction d'un quadrangle orthocentrique.

- (a) Soit  $C'$  l'image du point  $O$  dans la symétrie orthogonale par rapport à la droite  $(AB)$ . Démontrer que  $C'$  est distinct de  $O$ , puis déterminer la nature du quadrilatère  $AOBC'$ . Démontrer que l'affixe de  $C'$  est  $a + b$ .
- (b) On considère le point  $D$  tel que  $OC'DC$  soit un parallélogramme ( éventuellement aplati ).
- A quelle condition portant sur le triangle  $ABC$  les points  $O, C', D, C$  sont-ils alignés ?
  - Démontrer que  $(CD)$  est une hauteur du triangle  $ABC$ .

- (c) Démontrer que l'affixe  $d$  du point  $D$  est

$$d = a + b + c$$

En déduire que  $(AD)$  et  $(BD)$  sont des hauteurs du triangle  $ABC$ .

- (d) Démontrer que le quadrangle  $(ABCD)$  est orthocentrique.

## 3. Le cercle et la droite d'Euler d'un triangle.

- (a) On considère le milieu commun  $C_1$  des segments  $[AB]$  et  $[OC']$ , le milieu commun  $\Omega$  des segments  $[OD]$  et  $[CC']$ , et enfin le milieu  $C_2$  du segment  $[CD]$ . Déterminer les affixes des vecteurs  $\overrightarrow{C_1\Omega}$  et  $\overrightarrow{\Omega C_2}$ .
- (b) En déduire que le cercle de rayon  $\frac{1}{2}$  centré en  $\Omega$  passe par les milieux respectifs  $A_1, B_1, C_1$  des côtés  $[BC], [CA], [AB]$  du triangle  $ABC$ , par les milieux respectifs  $A_2, B_2, C_2$  des segments  $[AD], [BD], [CD]$  et par les points  $A_3, B_3, C_3$ , pieds des hauteurs du triangle  $ABC$  passant respectivement par  $A, B, C$ .  
Le cercle précédent est appelé *cercle d'Euler du triangle ABC*;
- (c) Montrer que l'homothétie  $h$  de centre  $D$  et de rapport 2 transforme le cercle d'Euler du triangle  $ABC$  en le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .
- (d) A l'aide de ce qui précède, donner une démonstration du théorème suivant :

*Théorème 1* : Etant donné un quadrangle orthocentrique  $(ABCD)$ , les quatre triangles déterminés par ses sommets pris trois à trois ont le même cercle d'Euler. Celui-ci passe par neuf points : les six milieux des côtés du quadrangle et les pieds des hauteurs des triangles.

- (e) Soit  $G$  le centre de gravité du triangle  $ABC$ . Calculer l'affixe de  $G$ ; en déduire que les points  $O, \Omega, D$  et  $G$  sont alignés. Lorsque le triangle  $ABC$  n'est pas équilatéral, la droite passant par les quatre points précédents est appelée *droite d'Euler du triangle  $ABC$* . Préciser la position des points  $\Omega$  et  $G$  sur le segment  $[OD]$ . Que se passe-t-il si le triangle  $ABC$  est équilatéral ?

4. Cercle d'Euler associé à un quadrangle orthocentrique.

On ajoute aux points  $A, B, C, D, C'$  introduits précédemment le point  $A'(b+c)$  et le point  $B'(c+a)$ .

- (a) Démontrer que le cercle circonscrit au triangles  $A'B'C'$  est centré en  $D$  et de rayon 1 et que le quadrangle  $(A'B'C'O)$  est orthocentrique ( on pourra, en le justifiant, utiliser le fait que le triangle  $A'B'C'$  est l'image de  $ABC$  par une isométrie que l'on précisera).

- (b) Compléter l'énoncé suivant :

*Théorème 2* : Soit un quadrangle orthocentrique  $(ABCD)$ . [...]. Les huit triangles [...] ont le même cercle d'Euler; ce cercle passe par les douze points [...] rattachés au quadrangle.

- (c) On s'intéresse maintenant aux droites d'Euler.

- i. Démontrer que le triangle  $ABC$  est équilatéral si et seulement si on a  $a + b + c = 0$ .
- ii. Dans le cas où le triangle  $ABC$  n'est pas équilatéral, que peut-on dire des droites d'Euler des triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  ?

5. Un peu d'histoire des mathématiques.

*Comme on le sait, l'oeuvre de Leonhard Euler ( 1707-1783 ) est colossale et touche à tous les champs des mathématiques; mais Euler est plus connu pour ses travaux en analyse qu'en géométrie; ses études dans cette branche étaient souvent prétexte à revenir à l'analyse qu'il affectionnait. Toujours épris d'un profond désir de clarté, il fut amené à préciser nombre de notations encore en vigueur à l'heure actuelle.*

Pouvez-vous, parmi vos connaissances personnelles des programmes du secondaire, choisir un point précis ( notion mathématique ou notation ) qui soit un apport de ce mathématicien et le situer comme tel dans une courte présentation d'une dizaine de lignes accessible à des élèves de lycée ? Le cercle d'Euler et la droite d'Euler ne peuvent être retenus ici.

## PARTIE II

*Dans cette partie, le plan complexe est toujours rapporté à un repère cartésien orthonormal direct d'origine  $O$ . On désigne toujours par  $\Gamma$  le cercle de centre  $O$  et de rayon 1 et on note, comme précédemment,  $a, b, c, d$  les affixes respectives des points  $A, B, C, D$ . On conseille vivement de réaliser plusieurs figures séparées.*

1. Soient  $[AB]$  et  $[CD]$  deux cordes parallèles du cercle  $\Gamma$ . Démontrer que les angles orientés de vecteurs  $(\vec{OA}, \vec{OC})$  et  $(\vec{OD}, \vec{OB})$  sont égaux. En déduire  $ab = cd$ .
2. Equation complexe d'une droite dans le plan complexe.

(a) Soit  $I$  le milieu d'une corde  $[AB]$  du cercle  $\Gamma$ . Soient  $Z(z)$  un point,  $S(z)$  l'image de  $Z$  dans la symétrie orthogonale par rapport à la médiatrice du segment  $[AB]$  et  $T(t)$  le symétrique du point  $S$  par rapport au point  $I$ .

i. Lorsque le point  $Z$  est différent du point  $O$ , montrer que

$$\frac{s}{|s|} \frac{z}{|z|} = ab$$

puis exprimer  $t$  en fonction de  $a, b, z$ . Le résultat obtenu est-il valable quand  $Z$  coïncide avec  $O$  ?

- ii. Démontrer que le point  $Z$  appartient à la droite  $(AB)$  si et seulement si  $Z = T$ .
- iii. En déduire que la relation :

$$(1) \quad z + ab\bar{z} = a + b$$

caractérise les points de la droite  $(AB)$ .

iv. Soit  $[PQ]$  un diamètre de  $\Gamma$ . On note  $p$  l'afixe du point  $P$ ; démontrer que les points de la droite  $(PQ)$  sont caractérisés par

$$z - p^2\bar{z} = 0$$

(b) Soit  $\Delta$  une droite quelconque du plan passant par le point  $Z_0(z_0)$  et parallèle à  $(PQ)$ . Montrer que la relation

$$(2) \quad z - p^2\bar{z} = z_0 - p^2\bar{z}_0$$

caractérise les points de la droite  $\Delta$  ( On pourra noter que le point  $Z(z)$  appartient à la droite  $\Delta$  si et seulement si son image par la translation de vecteur  $\vec{Z_0O}$  appartient à la droite  $(PQ)$ .

(c) Quel est le coefficient directeur complexe de la droite  $(AB)$  définie au II.2.1 ?

3. Soient  $[AB]$  et  $[CD]$  deux cordes parallèles du cercle  $\Gamma$ . La droite perpendiculaire à  $[AB]$  passant par  $D$  recoupe le cercle  $\Gamma$  en  $D'$  ( $d'$ ) ( les points  $D$  et  $D'$  peuvent éventuellement être confondus ). Démontrer que  $d' = -c$  puis que

$$d' = -\frac{ab}{d}$$

#### 4. Droite de Simson

Soient  $A, B, C, D$  quatre points distincts deux à deux du cercle  $\Gamma$ . On note  $U(u)$ ,  $V(v)$ ,  $W(w)$  les projetés orthogonaux respectifs du point  $D$  sur les droites  $(AB)$ ,  $(BC)$ ,  $(CA)$ . On se propose de démontrer que les trois points  $U, V, W$  sont alignés.

- (a) Démontrer ce résultat lorsque la corde  $[CD]$  est un diamètre du cercle  $\Gamma$ .
- (b) On se place dans le cas où la corde  $[CD]$  n'est pas un diamètre de  $\Gamma$  et n'est pas perpendiculaire à la corde  $[AB]$ . La perpendiculaire à la droite  $(AB)$  passant par  $D$  recoupe le cercle  $\Gamma$  en  $P$ .
  - i. Démontrer que les angles orientés de droites  $((CA), (CP))$  et  $((WA), (WU))$  sont égaux.
  - ii. Déterminer le coefficient directeur complexe de la droite  $(UW)$  et en déduire que les trois points  $U, V, W$  sont alignés.
- (c) Démontrer que les points  $U, V, W$  sont encore alignés lorsque la corde  $[CD]$  n'est pas un diamètre du cercle  $\Gamma$  et est perpendiculaire à la corde  $[AB]$  ( On pourra utiliser la tangente  $\tau$  au cercle  $\Gamma$  au point  $C$  ).  
La droite passant par les points  $U, V, W$  est appelée *droite de Simson du point  $D$  relativement au triangle  $ABC$* .

5. Cette question utilise des résultats obtenus dans la partie I. On y démontre le :  
*Théorème 3* : Dans un quadrilatère inscrit on considère pour chaque sommet sa droite de Simson relative au triangle formé par les trois autres sommets. Les quatre droites ainsi définies sont concourantes en un point appartenant aux cercles d'Euler des quatre triangles.

Reprenons les hypothèses et les notations de la question II.4.

- (a) Soit  $H$  l'orthocentre du triangle  $ABC$ . Quelle est l'affixe de  $H$  ?
- (b) Déterminer une équation complexe des droites  $(DU)$  et  $(AB)$ . En déduire la valeur de  $u$  en fonction de  $a, b, d$ .
- (c) Montrer alors que la droite de Simson du point  $D$  relativement au triangle  $ABC$  admet pour équation complexe :

$$(3) \quad z - \frac{abc}{d}\bar{z} = \frac{1}{2} \left( (a+b+c+d) - \frac{abc}{d} (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d}) \right)$$

- (d) Montrer que le point  $L$  d'affixe

$$l = \frac{1}{2} (a+b+c+d)$$

vérifie la conclusion du théorème 3.