

0066

19241

repère à reporter sur la copie

SESSION DE 2004

**concours interne
de recrutement de professeurs certifiés
et concours d'accès à l'échelle de rémunération**

section : mathématiques

composition de mathématiques

Durée : 5 heures

*Calculatrice électronique de poche – y compris calculatrice programmable, alphanumérique ou à écran graphique – à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.
Aucun document n'est autorisé.*

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements et des représentations graphiques interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Si le candidat détecte dans l'énoncé ce qu'il pense être une erreur, il continue son travail en indiquant les initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.

Les deux problèmes proposés sont indépendants ; ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.

PREMIER PROBLÈME

Le thème de ce problème est l'étude de la dérivation symétrique, et plus particulièrement de ses liens avec la dérivation « usuelle ».

Sauf mention contraire, les fonctions numériques envisagées dans ce problème sont supposées définies sur l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels ou sur l'ensemble \mathbf{R}^* des nombres réels non nuls.

À toute fonction numérique f , définie sur \mathbf{R} ou \mathbf{R}^* , on associe les fonctions φ et ψ définies sur \mathbf{R}^* respectivement par :

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$$\psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2x}$$

a) On rappelle qu'une fonction f , définie sur \mathbf{R} , est dite *dérivable en 0* lorsque la fonction associée φ admet une limite finie en 0 (notée $f'(0)$).

b) On donne maintenant la définition suivante :

Une fonction f , définie sur \mathbf{R} ou sur \mathbf{R}^* , est dite *symétriquement dérivable en 0* lorsque la fonction associée ψ admet une limite finie en 0 (notée $f'_s(0)$).

Ces notations seront utilisées dans toute la suite du problème.

Préambule

La fonction f étant définie sur \mathbf{R} , on note Γ sa courbe représentative dans un repère cartésien du plan, $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle A, B, C, D, E les points de Γ d'abscisses respectives 0 ; -1 ; -0,5 ; 0,5 ; 1.

Quelles relations peut-on établir entre les coefficients directeurs des six droites (AB), (AC), (AD), (AE), (BE), (CD) et les valeurs des fonctions φ ou ψ en certains points de \mathbf{R}^* ?

Donner une interprétation graphique de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$.

Première partie : étude de quelques exemples

1.1 **Exemple 1.** Dans cette question, on considère comme fonction f la fonction exponentielle de base e :

$$f: x \mapsto e^x$$

1.1.1. On appelle Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.1.1.1. Soient x_0 un réel quelconque et M_0 le point de Γ d'abscisse x_0 . Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la tangente à Γ en M_0 avec l'axe des abscisses.

En déduire une construction de la tangente à Γ au point M_0 .

1.1.1.2. Dessiner l'allure de la partie de Γ correspondant à l'intervalle $[-1; 1]$ (on prendra 5 cm pour mesurer les vecteurs unités). Sur le dessin, on représentera les tangentes à Γ aux points d'abscisses -1, 0 et 1.

1.1.2. Démontrer que la fonction ψ associée à f peut être définie sur \mathbf{R}^* par

$$\psi(x) = \frac{e^{2x}-1}{2x} \times \frac{1}{e^x}.$$

En déduire que f est symétriquement dérivable en 0 et donner la valeur de $f'_s(0)$.

1.1.3. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, des valeurs à 10^{-3} près par défaut de $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ pour les valeurs de x appartenant à l'ensemble E :

$$E = \{-0,5 ; -0,4 ; -0,3 ; -0,2 ; -0,1 ; 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; 0,4 ; 0,5\}.$$

On présentera les résultats dans un tableau.

1.2. **Exemple 2.** Dans cette question, la fonction f , définie sur \mathbf{R} , est une fonction affine :

$$f: x \mapsto f(x) = mx + p,$$

où m et p sont deux nombres réels.

Pour cette fonction f , comparer $\varphi(x)$ et $\psi(x)$. Conclusion ?

1.3. **Exemple 3.** Dans cette question, la fonction f , définie sur \mathbf{R} , est une fonction polynôme dont le degré est au plus égal à 2 :

$$f: x \mapsto f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma,$$

où a, β, γ sont trois nombres réels.

1.3.1. Donner la valeur de $f'(0)$.

1.3.2. Démontrer que, pour tout x de \mathbf{R}^* , on a $\psi(x) = f'(0)$.

En déduire que f est symétriquement dérivable en 0 et donner la valeur de $f'_s(0)$.

Comment le résultat précédent peut-il s'interpréter graphiquement ?

1.4. Pour chacun des exemples suivants, préciser si la fonction f est, ou non, dérivable en 0, et si elle est, ou non, symétriquement dérivable en 0.

1.4.1. **Exemple 4.** La fonction f est définie sur \mathbf{R} par $f(x) = |x|$.

1.4.2. **Exemple 5.** La fonction f est définie sur \mathbf{R} par
$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1.4.3. **Exemple 6.** La fonction f est définie sur \mathbf{R} par
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Deuxième partie : quelques résultats généraux

Soit f une fonction numérique définie sur \mathbf{R} .

2.1.

2.1.1. Vérifier que, pour tout réel x non nul, on a :

$$\psi(x) = \frac{1}{2}[\varphi(x) + \varphi(-x)]$$

Que peut-on en conclure quant à la parité de la fonction ψ ?

2.1.2. En déduire la

Propriété 1 : Si la fonction f est dérivable en 0, alors elle est symétriquement dérivable en 0.

Que peut-on alors dire de $f'_s(0)$ et $f'(0)$?

2.1.3. La réciproque de la *propriété 1* est-elle vraie ?

2.2. Démontrer la

Propriété 2 : Si la fonction f est paire, alors elle est symétriquement dérivable en 0.

2.3. Démontrer la

Propriété 3 : Si la fonction f est impaire, alors elle est dérivable en 0 si, et seulement si, elle est symétriquement dérivable en 0.

2.4. Donner un exemple de fonction continue en 0, non symétriquement dérivable en 0.

2.5. Donner un exemple de fonction symétriquement dérivable en 0, non continue en 0.

Troisième partie : deux approximations de $f'(0)$ pour l'exponentielle népérienne

Dans toute cette partie, on considère comme fonction f la fonction exponentielle de base e :

$$f: x \mapsto e^x$$

3.1. L'ensemble E est celui qui a été défini dans la question 1.1.3. de la première partie.

3.1.1. Déterminer les valeurs de x appartenant à l'ensemble E telles que $|\varphi(x) - f'(0)| \leq \varepsilon$, avec $\varepsilon = 0,1$.

Même question avec $\varepsilon = 0,01$.

3.1.2. Déterminer les valeurs de x appartenant à l'ensemble E telles que $|\psi(x) - f'(0)| \leq \varepsilon$, avec $\varepsilon = 0,1$.

Même question avec $\varepsilon = 0,01$.

3.2. Dans cette question, le réel x appartient à l'intervalle $I = [-0,5 ; 0,5]$.

3.2.1. On considère les fonctions α et β définies sur I respectivement par :

$$\alpha(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}e^{-0,5}$$

$$\beta(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}e^{0,5}$$

Étudier les variations des fonctions α et β .

3.2.2. Démontrer que, pour tout réel x de I , on a :

$$1 + x + \frac{x^2}{2}e^{-0,5} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}e^{0,5}$$

En déduire que, pour tout réel x non nul de I , on a :

$$\left| \frac{e^x - 1}{x} - 1 \right| \leq \frac{|x|}{2}e^{0,5}$$

3.2.3. Par des méthodes analogues à celles utilisées dans la question précédente on démontre, pour tout réel x strictement positif de I , le résultat ci-après (que l'on admettra) :

$$\frac{x^2}{6} e^{-0,5} \leq \frac{e^x - e^{-x}}{2x} - 1 \leq \frac{x^2}{6} e^{0,5}$$

Démontrer alors que, pour tout réel x non nul de I , on a :

$$\left| \frac{e^x - e^{-x}}{2x} - 1 \right| \leq \frac{x^2}{6} \cdot e^{0,5}$$

3.2.4. Dédurre des questions précédentes un intervalle I_1 et un intervalle I_2 tels que, pour tout réel x non nul de I :

$$x \in I_1 \Rightarrow |\varphi(x) - f'(0)| \leq 10^{-2}$$

$$x \in I_2 \Rightarrow |\psi(x) - f'(0)| \leq 10^{-2}$$

3.2.5. D'après les résultats obtenus à la question précédente, peut-on dire que la fonction ψ est « plus proche » de $f'(0)$ que la fonction φ ? Si oui, préciser le sens donné à cette formulation.

Quatrième partie : caractérisation des fonctions polynômes de degré 1 ou 2

4.1. *Question préliminaire* : On considère deux réels a et b tels que $a < b$, et un réel x de l'intervalle $[a ; b]$.

4.1.1. Démontrer qu'il existe un réel unique t de $[0 ; 1]$ tel que $x = (1 - t)a + tb$.

4.1.2. On définit sur \mathbf{N} deux suites réelles (a_n) et (b_n) de la façon suivante :

(i) $a_0 = a$ et $b_0 = b$

(ii) pour tout entier n :

a. si $x \in [a_n ; \frac{a_n + b_n}{2}[$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$

b. sinon, on pose $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.

4.1.2.1 Écrire un algorithme permettant d'obtenir les termes successifs de ces deux suites.

4.1.2.2. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on peut écrire a_n sous la forme

$$a_n = a + k_n \frac{b - a}{2^n},$$

où k_n est un entier vérifiant $0 \leq k_n < 2^n$.

En déduire l'écriture correspondante de b_n .

4.2. Dans cette question, on considère une fonction polynôme f de degré inférieur ou égal à 2, définie sur \mathbf{R} par :

$$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma,$$

où a, β, γ sont trois nombres réels.

Soit Γ la représentation graphique de f dans un repère cartésien $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

4.2.1. Démontrer que, pour tout réel m et pour tout réel non nul x , on a :

$$\frac{f(m+x) - f(m-x)}{2x} = f'(m) \quad [1]$$

4.2.2. Interpréter graphiquement ce résultat.

4.3. Dans cette question, on considère une fonction f définie et continue sur \mathbf{R} , qui vérifie pour tous réels λ et μ la relation :

$$\frac{f(\lambda) + f(\mu)}{2} = f\left(\frac{\lambda + \mu}{2}\right) \quad [2]$$

On se propose de démontrer que cette dernière relation caractérise les fonctions affines (c'est-à-dire les fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 1).

Soient deux réels a et b tels que $a < b$ et un réel x de l'intervalle $[a; b]$. On se place dans les conditions de la question préliminaire et on reprend les mêmes notations.

4.3.1. Démontrer, que pour tout entier naturel n , on a :

$$f(a_n) = \left(1 - \frac{k_n}{2^n}\right)f(a) + \frac{k_n}{2^n}f(b)$$

4.3.2. En déduire que, pour tout réel $t \in [0; 1]$, on a

$$f((1-t)a + tb) = (1-t)f(a) + tf(b),$$

puis démontrer la

Propriété 4 : Soit f une fonction numérique définie et continue sur \mathbf{R} .

Si, pour tous réels λ et μ , on a $\frac{f(\lambda) + f(\mu)}{2} = f\left(\frac{\lambda + \mu}{2}\right)$, alors f est une fonction affine.

4.3.3. Démontrer que la propriété ci-dessus est caractéristique des fonctions affines.

4.4. Dans cette question, on considère une fonction f définie et dérivable sur \mathbf{R} , qui vérifie pour tout réel m et tout réel non nul x la relation [1] :

$$\frac{f(m+x) - f(m-x)}{2x} = f'(m)$$

On se propose de démontrer que cette relation caractérise les fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

4.4.1. Démontrer que, pour tous réels m et x , on a :

$$f(m+x) - f(m-x) = 2xf'(m) \quad \text{et} \quad f'(m) = \frac{1}{2} [f'(m+x) + f'(m-x)]$$

4.4.2. Démontrer la

Propriété 5 : Soit f une fonction définie et dérivable sur \mathbf{R} .

Si, pour tout réel m et tout réel non nul x , on a $\frac{f(m+x) - f(m-x)}{2x} = f'(m)$, alors f est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

SECOND PROBLÈME

Pour tout ce problème, on se placera dans le plan affine euclidien réel E .

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sera noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Première partie : trois études préliminaires

1.1. Cercle inscrit dans un losange.

Définition 1 : On dit qu'un cercle γ est inscrit dans un quadrilatère MNPQ (ou que le quadrilatère MNPQ est circonscrit au cercle γ) si les côtés du quadrilatère sont tangents au cercle.

1.1.1. Soit ABA'B' un losange du plan E , de diagonales [AA'] et [BB'].

Démontrer qu'il existe un cercle inscrit dans ce losange, et un seul. Préciser son centre.

1.1.2. Réciproquement, si l'on considère un cercle quelconque C du plan E et qu'on y circonscrit un parallélogramme, on se propose de démontrer que celui-ci est un losange.

1.1.2.1. Donner une démonstration (du niveau collège ou lycée, au choix) établissant le résultat classique suivant :

« Étant donné un point M dont la distance au centre d'un cercle donné est strictement supérieure au rayon de celui-ci, il existe deux tangentes distinctes au cercle passant par M. De plus, si V et V' désignent les points de contact de ces tangentes avec le cercle, on a $MV = MV'$. »

1.1.2.2. En déduire que, si l'on construit un parallélogramme circonscrit au cercle (construction dont on justifiera la possibilité), ce parallélogramme est un losange.

1.2. Représentation paramétrique d'un cercle

On considère, dans le plan euclidien E rapporté au repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe Γ de représentation paramétrique :

$$[1] \quad \begin{cases} x(t) = R \cdot \cos(t) \\ y(t) = R \cdot \sin(t) \\ t \in]-\pi; \pi] \end{cases}$$

où R est un réel strictement positif.

Démontrer que Γ n'est autre que le cercle de centre O et de rayon R .

1.3. Étude d'une transformation : Dans cette question, on se placera dans le cadre de la

Définition 2 : Soient, dans le plan euclidien E , une droite d et un point O de d , et soit un réel non nul k . On considère un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ dont d est l'axe des abscisses.

On appelle affinité orthogonale d'axe d et de rapport k la transformation φ qui, à tout point M de E de coordonnées $(x ; y)$, associe le point $\varphi(M)$ de coordonnées $(x ; ky)$.

1.3.1. Démontrer que φ est une bijection de E sur E et déterminer sa transformation réciproque φ^{-1} .

1.3.2. On considère une droite Δ , admettant l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1.3.2.1. Démontrer que $\varphi(\Delta)$ est une droite et que, si Δ coupe d en un point I , il en est de même de $\varphi(\Delta)$.

1.3.2.2. Soient M, N, P trois points distincts sur la droite Δ , et soit λ l'unique réel vérifiant : $\overrightarrow{MP} = \lambda \cdot \overrightarrow{MN}$. Soient M', N', P' les images respectives de M, N, P par φ . Démontrer qu'on a également : $\overrightarrow{M'P'} = \lambda \cdot \overrightarrow{M'N'}$.

1.3.3. Démontrer que les images par φ de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.

1.3.4. On considère la courbe H admettant dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ la représentation paramétrique suivante :

$$[2] \quad \begin{cases} x(t) = \alpha \cdot \cos(t) \\ y(t) = \beta \cdot \sin(t) \\ t \in]-\pi; \pi] \end{cases} \quad (\text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux réels strictement positifs}).$$

Toute courbe admettant, dans un repère orthonormal bien choisi, une représentation paramétrique de ce type est appelée *ellipse*.

1.3.4.1. Démontrer que l'origine O du repère est centre de symétrie pour H (ce point est appelé *centre* de l'ellipse H .)

1.3.4.2. Construire l'ellipse H dans le cas particulier où $\alpha = 2$ et $\beta = 1$ (on prendra 2 cm pour unité graphique).

Dans la fin de cette partie, on revient au cas général où α et β sont deux réels strictement positifs.

1.3.4.3. On suppose k strictement positif. Démontrer que $\varphi(H)$, image de H par φ , est une ellipse.

1.3.4.4. Même question lorsque k est strictement négatif.

1.3.4.5. L'ellipse $\varphi(H)$ peut-elle être un cercle ? Si oui, à quelles conditions ?

Deuxième partie : étude de deux conditions de contact d'une droite avec un cercle

Soient I un point du plan E et R un réel strictement positif. On considère le cercle C de E , de centre I et de rayon R , et un diamètre $[GG']$ de C . On appelle Δ et Δ' les tangentes à C respectivement en G et G' .

2.1. Première condition de contact.

Soit H un point de C , distinct de G et G' ; la tangente T à C en H coupe les droites Δ et Δ' respectivement en P et P' .

2.1.1. Démontrer que le triangle IPP' est rectangle en I .

2.1.2. En déduire que l'on a la relation $\overrightarrow{HP} \cdot \overrightarrow{HP'} = -R^2$.

2.1.3. En déduire que l'on a la relation :

$$\overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{G'P'} = R^2 \quad (\text{condition 1}).$$

2.2. Réciproque.

Démontrer que, réciproquement, si deux points P et P' appartiennent respectivement aux tangentes Δ et Δ' et sont tels que $\overrightarrow{GP} \cdot \overrightarrow{G'P'} = R^2$, alors la droite (PP') est tangente au cercle C (on pourra par exemple introduire un repère orthonormal $(I ; \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\vec{u} = \frac{1}{R} \cdot \overrightarrow{IG}$.)

2.3. Seconde condition de contact.

Nous venons de voir que la condition 1 caractérise les droites (PP') astreintes aux trois conditions :

- (i) P appartient à Δ et est distinct de G ;
- (ii) P' appartient à Δ' et est distinct de G' ;
- (iii) (PP') est tangente au cercle C.

Nous allons en déduire une seconde caractérisation de cette situation.

2.3.1. Soit A un point de Δ , distinct de G. Construire un losange ABA'B', circonscrit au cercle C, tel que B appartienne à Δ . Combien y a-t-il de solutions ?

2.3.2. On introduit un repère orthonormal $(I ; \vec{u}, \vec{v})$ tel que $\vec{u} = \frac{1}{R} \cdot \overrightarrow{IG}$.

2.3.2.1. On appelle a l'ordonnée du sommet A dans ce repère. Déterminer, en fonction de a et de R , les coordonnées des sommets A', B et B'.

2.3.2.2. En déduire que la droite (PP') est tangente à C si, et seulement si, on a la relation

$$R^2 \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{P'A'} + a^2 \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{P'B'} = 0 \quad (\text{condition 2})$$

Troisième partie : étude d'une condition de contact d'une droite avec une ellipse

Le plan affine euclidien E est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère l'ellipse H définie dans ce repère par la représentation paramétrique :

$$[2] \quad \begin{cases} x(t) = \alpha \cdot \cos(t) \\ y(t) = \beta \cdot \sin(t) \\ t \in]-\pi; \pi] \end{cases} \quad (\text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux réels strictement positifs}).$$

3.1. Ellipse inscrite dans un parallélogramme.

3.1.1. Donner une équation cartésienne de la tangente à H au point M_0 correspondant à la valeur t_0 du paramètre t .

3.1.2. Démontrer qu'il existe un unique point M_1 de H, distinct de M_0 , tel que la tangente à H en M_1 soit parallèle à la tangente à H en M_0 .

3.1.3. En généralisant la *définition 1*, on donne la

Définition 3 : On dit qu'une ellipse H est inscrite dans un quadrilatère MNPQ (ou que le quadrilatère MNPQ est circonscrit à l'ellipse H) si les côtés du quadrilatère sont tangents à l'ellipse.

Déduire de ce qui précède qu'il existe une infinité de parallélogrammes circonscrits à une ellipse donnée.

3.2. Reprise et prolongement de l'étude précédente

On se propose maintenant d'affiner l'étude ci-dessus en transformant les résultats obtenus dans la deuxième partie à l'aide d'une affinité orthogonale.

Soit toujours l'ellipse H définie, dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, par la représentation paramétrique [2] donnée au début de cette partie. On considère l'affinité orthogonale φ ayant pour axe l'axe des abscisses et pour rapport le réel $k = \frac{\beta}{\alpha}$.

3.2.1. On considère le cercle Γ de centre O et de rayon α .

Démontrer que l'image de Γ par φ est H et qu'une droite d est tangente au cercle Γ en un point M si, et seulement si, l'image $\varphi(d)$ de cette droite est tangente à H au point $\varphi(M)$.

On dit qu'un point est *extérieur* à H s'il est l'image par φ d'un point extérieur à Γ . Déduire de ce qui précède que, par un point extérieur à H , on peut mener deux droites qui lui sont tangentes.

3.2.2. Soit maintenant un parallélogramme $MNM'N'$ circonscrit à l'ellipse H . Démontrer qu'il existe un unique losange $ABA'B'$ circonscrit au cercle Γ dont l'image par φ est le parallélogramme $MNM'N'$.

3.2.3. Déduire de ce qui précède qu'une droite d , coupant respectivement les droites (MN) et $(M'N')$ en Q et Q' , est tangente à l'ellipse H si, et seulement si, il existe un réel non nul a tel que :

$$\alpha^2 \overrightarrow{QM} \cdot \overrightarrow{Q'M'} + a^2 \overrightarrow{QN} \cdot \overrightarrow{Q'N'} = 0 \quad (\text{condition 3})$$

Quatrième partie : lieu des points « d'où l'on voit une ellipse suivant un angle droit » (Gaspard MONGE, 1746-1818)

On reprend l'ellipse H définie dans la partie 3 par la représentation paramétrique [2] dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan affine euclidien réel E .

4.1. Démontrer qu'un point M du plan E , de coordonnées $(x; y)$, appartient à H si, et seulement si, on a la relation :

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

Cette équation est appelée *équation réduite* de H dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

4.2. Points de contact avec H d'une droite passant par un point M donné.

Soit M_0 un point donné de l'ellipse H , de coordonnées $(x_0; y_0)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, et soit M un point quelconque de E , de coordonnées $(x; y)$ dans ce même repère.

4.2.1. Démontrer que la droite (M_0M) est tangente à l'ellipse H si, et seulement si, les réels x, y vérifient le système :

$$[3] \quad \begin{cases} \frac{xx_0}{\alpha^2} + \frac{yy_0}{\beta^2} = 1 \\ \left(\frac{xx_0}{\alpha^2} + \frac{yy_0}{\beta^2} \right)^2 = \frac{x_0^2}{\alpha^2} + \frac{y_0^2}{\beta^2} \end{cases}$$

4.2.2. On suppose maintenant que la droite (M_0M) est tangente à H et admet un coefficient directeur de la forme $\frac{1}{q_0}$ (avec $q_0 \neq 0$).

4.2.2.1. Exprimer q_0 en fonction de α, β, x_0, y_0 .

4.2.2.2. En déduire que q_0 vérifie l'équation d'inconnue Q :

$$[4] \quad (\beta^2 - y^2)Q^2 + 2xyQ + (\alpha^2 - x^2) = 0$$

4.2.2.3. Interpréter géométriquement les deux cas suivants :

- l'équation [4] admet deux racines réelles distinctes ;
- l'équation [4] admet une racine réelle double.

4.3 . Déduire de l'étude précédente que le lieu des points par lequel passent deux tangentes perpendiculaires à l'ellipse H est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

On notera ω ce cercle (appelé cercle orthoptique de l'ellipse H).

4.4. Soit t une tangente quelconque à l'ellipse H .

4.4.1. Démontrer que t coupe le cercle ω en deux points distincts, que l'on notera J et L .

4.4.2. On désigne par J' et L' les symétriques respectifs de J et L par rapport au point O . Démontrer que le quadrilatère $JLJ'L'$ est un rectangle circonscrit à l'ellipse H et inscrit dans le cercle ω .