Correction Partielle du Concours du CAPES interne session 2005

Yann Lecacheux

1 première partie

Question 1.1 (étude du sens de variation de f)
La fonction f est dérivable car c'est une fonction polynôme. On obtient pour tout réel x, $f'(x) = -2x + 2$.

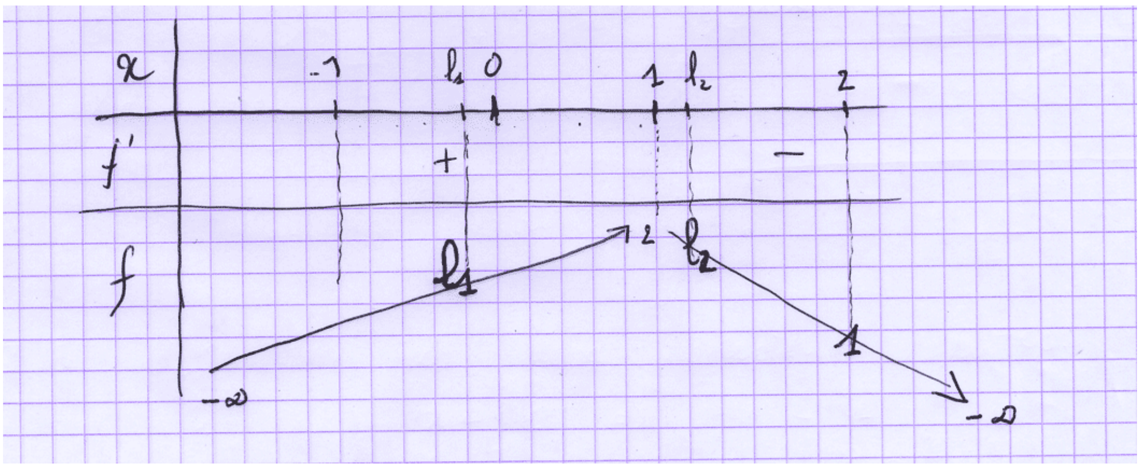
$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$$

Pour $x \in]-\infty; 1[$, f est croissante. Et pour $x \in]1; +\infty[$, f est décroissante.

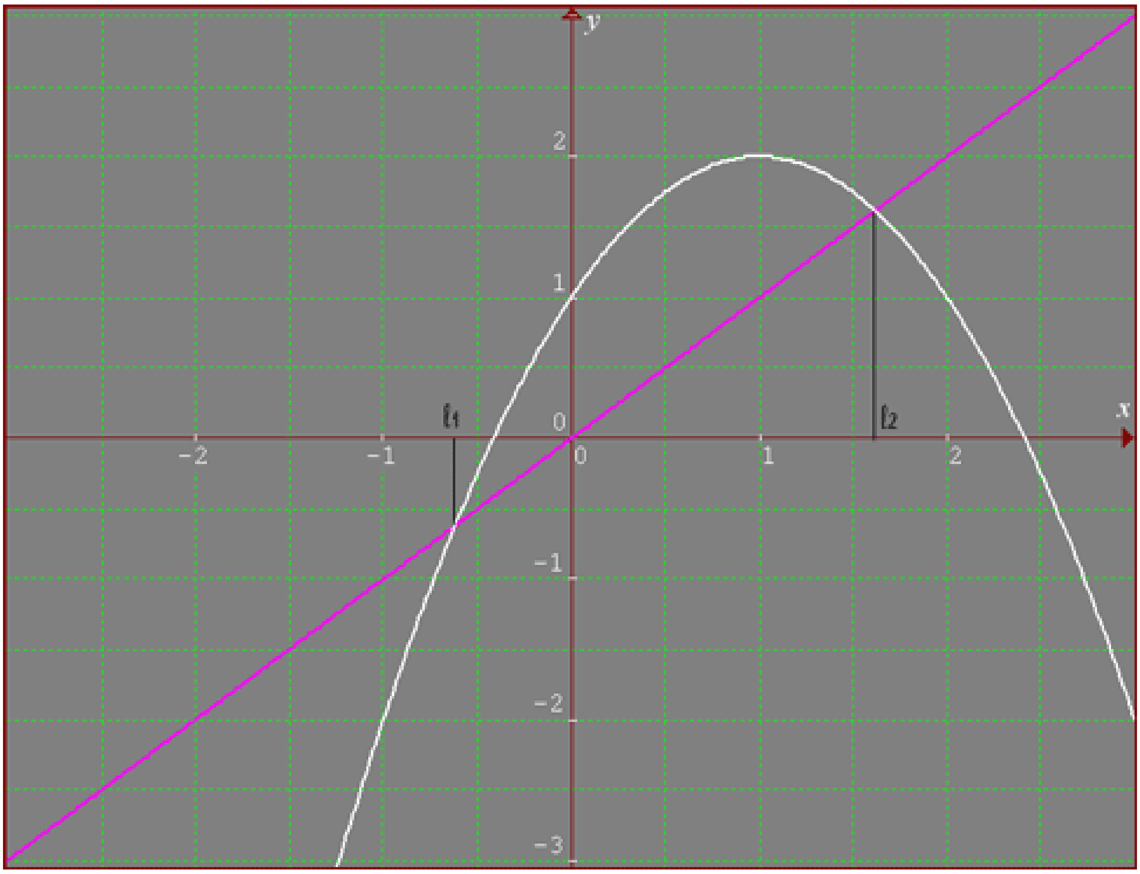
Question 1.2 (Les racines de $f(x) - x$)
Pour tout réel, $f(x) - x = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 1 = 0$. C'est un trinôme du second degré. $\Delta = 5$. Il y a deux solutions distinctes. $l_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $l_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Question 1.3 (Deux propriétés)
a) $f(x) - x > 0$ si et seulement si $x \in]l_1; l_2[$. Car le polynôme $-x^2 + x + 1$ est négatif quand x varie à l'exterieur des racines. On en déduit que si $x < l_1$, alors $f(x) < x$. Ce qui implique que $f(x) < l_1$.
b) D'après l'étude de la question I.1. nous avons démontré que sur l'intervalle $]1; +\infty[$, f était décroissante et admettait la valeur 2 comme maximum. On en déduit que si $x \in]1; 2[$, alors $f(x) < 2$.
D'autre part, comme $f(2) = 1$ et que f strictement décroissante sur $]1; +\infty[$, on en déduit que si $x \in]1; 2[$, alors $f(x) > 1$.

Question 1.4 (Tableau de variation de f)



Question 1.5 (Courbe représentative de f)



Question 1.6 (Détermination de $\mathcal{C}_f \cap (D)$)
Résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} y = & x \\ y = & -x^2 + x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow -x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0.$$

Les solutions sont $s = \{l_1; l_2\}$. Pour $x \in [l_1; l_2]$ $f(x) \geq x$. C'est à dire que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de (D). Mais si x n'appartient pas à l'intervale $[l_1; l_2]$ alors $f(x) < x$ et $\mathcal{C}_f$ est au dessous de (D).

2 Deuxième partie

Question 2.1 (Calcul des premiers termes de la suite)
a) Dans le cas où $U_0 = -0,7$, alors $U_1 = -0,89$, $U_2 = -1,572$, $U_3 = -4,616$, $U_4 = -29,54$, $U_5 = -930,5$.
b) Dans le cas où $U_0 = 1,25$, alors $U_1 = 1,9375$, $U_2 = 1,1211$, $U_3 = 1,9853$, $U_4 = 1,0291$, $U_5 = 1,9992$.

Question 2.2 (Montrons que si la suite converge alors ça ne peut-être que vers un point fixe)
Par définition de la limite d'une suite, nous pouvons écrire que $\lim_{x\to+\infty} U_n = \lim_{x\to+\infty} U_{n+1}$. C'est à dire que $\lim_{x\to+\infty} U_n = \lim_{x\to+\infty} f(U_n)$. Mais nous avons pris comme hypothèse qu'il existant un réel λ tel que $\lim_{x\to+\infty} U_n = \lambda$. Donc de par la continuité de la fonction f, $\lim_{x\to+\infty} f(U_n) = f(\lim_{x\to+\infty} U_n)$ et $\lambda = f(\lambda)$. On en déduit que $\lambda = l_1$ ou $\lambda = l_2$.

Question 2.3 (On suppose que $U_0 < l_1$)
2.3.1 Montrons que pour tout entier n, $U_n < l_1$
Par récurrence sur l'entier n. C'est vrai pour le rang 0 puisque $U_0 < l_1$. Supposons que ce soit vrai pour le rang n (c'est l'hypothèse de recurrence).Montrons que c'est vrai pour le rang $n+1$. D'après la question 1.3 si $x < l_1$, alors $f(x) < l_1$. Mais d'après notre hypothèse de recurrence $U_n < l_1$. On en déduit que $f(U_n) < l_1$. C'est à dire que $U_{n+1} < l_1$.
2.3.2 Montrons que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
D'après la question 1.3.a. si $x < l_1$, alors $f(x) < x$, c'est à dire $f(U_n) < U_n$. Soit $U_{n+1} < U_n$. On en déduit que le suite décroît.
2.3.3 Montrons que la suite diverge.
La suite est strictement décroissante,son premier terme est plus petit que l_1 donc elle diverge car on a vu qu'elle ne pouvait converger que vers l_1 ou l_2.

Question 2.4 (On suppose que $1 < U_0 < l_2$)
2.4.1 Montrons que $l_2 < U_1 < 2$
f est strictement décroissante sur $]1; l_2[$ donc $f(l_2) < f(U_0) < f(1)$. C'est à dire $l_2 < U_1 < 2$.
2.4.2 Prouvons les deux égalités

$$f(f(V_n)) = f(f(U_{2n})) = f(U_{2n+1}) = U_{2(n+1)} = V_{n+1}$$

et

$$f(f(w_n)) = f(f(U_{2n+1})) = f(U_{2n+2}) = U_{2n+3} = W_{n+1}$$

2.4.3 Montrons que pour tout entier n, $1 < V_n < l_2$ et $l_2 < W_n < 2$
Nous avons $V_0 = U_0$ et $U_0 \in]1, l_1[$ par hypothèse. Donc ceci est vrai pour le rang 0. Supposons que ce soit vrai pour le rang n (hypothése de recurrence). Montrons que c'est vrai pour le rang $n+1$. Comme f est décroissante, on a $f(l_2) < f(V_n) < f(1)$. C'est à dire $l_1 < f(V_n) < 2$. D'autre part, en composant deux fois par f, on obtient : $f(2) < f(f(V_n)) < f(l_2)$. Ce qui est equivalent à $1 < V_{n+1} < l_2$.
De la même façon, on a $W_0 = U_1$ et d'après la question 2.4.1 $l_2 < U_1 < 2$, c'est à dire $l_2 < W_0 < 2$. On obtient le résultat par récurrence sur l'entier n.
2.4.4 Calcul de $f \circ f$

Pour tout réel x,

$$f \circ f(x) = f(-x^2 + 2x + 1)$$
$$f \circ f(x) = -(-x^2 + 2x + 1)^2 + 2(-x^2 + 2x + 1) + 1$$
$$f \circ f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2$$

2.4.5 Factorisation de $f \circ f - id(x) = (-x^2 + x + 1)(x^2 + ax + b)$
On developpe l'expression ci-dessus et on obtient :

$$f \circ f(x) - x = -x^4 + (1 - a)x^3 + (1 + a - b)x^2 + (a + b)x + b$$

Par identification terme à terme on trouve $a = -3$ et $b = 2$.
2.4.6 Résoudre $f \circ f - id(x) = 0$

x		l_1		0		1		l_2		2	
$(-x^2 + x + 1)$	-	0	+		+		+	0	-		-
$(x^2 - 3x + 2)$	+		+		+	0	-		-	0	+
$f \circ f(x) - x$						0	-	0	+	0	

2.4.7 Variation des suites $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **et** $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$
Nous avons montré que pour tout entier n, $1 < V_n < l_2$. D'autre part $V_{n+1} - V_n = f \circ f(V_n) - V_n$. Or d'après la question précédente $f \circ f(x) - x < 0$ si et seulement si $x \in]1, l_2[$. Donc $V_{n+1} - V_n < 0$ pour tout entier n. C'est à dire que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement décroissante.
De la même façon, puisque $l_1 < W_n < 2$ pour tout entier n, et que sur $l_2 < x < 2$ on a $f \circ f(x) - x > 0$, alors la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante strictement.
2.4.8 Montrons que ces deux suites convergent et précisons leur limite
$(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1 donc elle converge.$(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 2 donc converge. Ces deux suites ne peuvent converger que vers les solutions de l'équation $f \circ f - id(x) = 0$. La valeur de leur limite ne peut-être que $l_1; 1; l_2$ ou 2. On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} V_n = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} W_n = 2$.
2.4.9 Convergence de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$
Non, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas pour la valeur initiale $U_0 \in]1, l_2[$ car les deux suites extraites $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'ont pas même limite.